

Визуальные модели задачи определения расстояния от точки до плоскости

Определение расстояния от точки до плоскости - это одна из опорных задач стереометрии, которая должна «на автомате» использоваться при решении содержательных стереометрических задач. В этой связи очень важно выработать умение определять расстояние от точки до плоскости.

Я предлагаю учащимся несколько визуальных моделей. Мы рассматриваем их, отслеживая и проговаривая стереометрические теоремы, позволяющие объяснить эти модели, а далее примеряем эти модели на простейшие многогранники.

Модель 1. Признак перпендикулярности плоскостей.

Учащиеся знают, что если плоскость проходит через прямую перпендикулярную некой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны (признак перпендикулярности плоскостей). Как его визуализировать?

Берём ручку. Ставим её перпендикулярно столу. Признак перпендикулярности прямой и плоскости нам в помощь. Приставляем книжку к ручке. Любое положение книжки в этой конструкции являет собой плоскость перпендикулярную столу.

Далее на кубе отрабатываем эту модель. Большую помощь в формировании этого навыка оказывают домашние практические творческие работы. Ребята рассматривают не только куб, но и правильные треугольные и шестиугольные призмы. Работы выполняют вручную и в электронном виде.

После отработки этого навыка переходим к следующему. Как опустить перпендикуляр из точки на плоскость?

Модель 2. Расстояние от точки до плоскости.

Визуализируем:

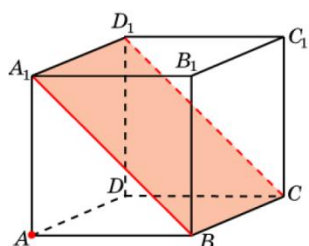
Некая точка висит над столом. Берём книжку, ставим её перпендикулярно столу (видение перпендикулярных плоскостей уже есть) и ведём пока не «захватим» точку. Точка попадает в плоскость перпендикулярную плоскости стола. Остаётся опустить перпендикуляр на линию пересечения плоскостей, то есть на ребро книжки.

Итог: чтобы опустить перпендикуляр из точки A на плоскость α , нужно поместить точку A в плоскость перпендикулярную плоскости α и опустить перпендикуляр из точки A на линию пересечения плоскостей.

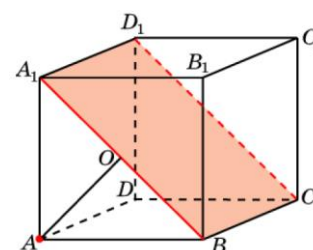
Такие базовые навыки, как видение перпендикулярных плоскостей, опускание перпендикуляра из точки на плоскость, отрабатываем, решая задачи. Предложенную подборку задач я прошу учащихся решить, определив перпендикулярные плоскости.

Для облегчения решения все задачи сопровождаются рисунками, на которых можно производить необходимые построения. Данный тренажёр можно использовать как трансформер, учитывая различные учебные возможности учащихся, а именно: убрав информацию правого столбика - предложить более подготовленным учащимся; оставив информацию правого столбика - использовать как обучающий тренажёр.

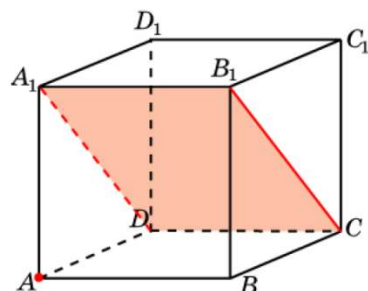
1. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости BCD_1 .



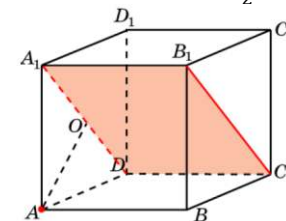
Наклонная плоскость перпендикулярна плоскости передней грани (BC ручка), A_1B линия пересечения плоскостей. Опускаем перпендикуляр из точки A на ребро A_1B . $AO = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



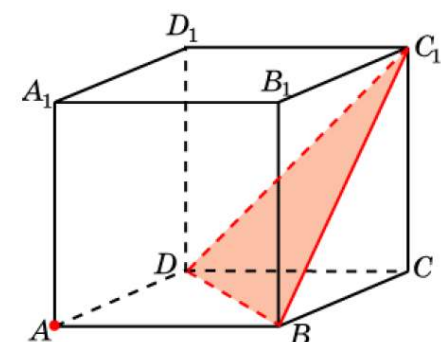
2. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости CDA_1 .



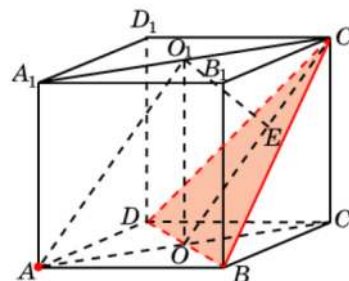
Наклонная плоскость перпендикулярна плоскости боковой грани (A_1B_1 ручка), A_1D линия пересечения плоскостей. Опускаем перпендикуляр из точки A на ребро A_1D . $AO = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



3. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости BC_1D .



Диагональная плоскость AA_1C_1 перпендикулярна наклонной плоскости (BD ручка). OC_1 линия пересечения плоскостей. Прямая AO_1 параллельна плоскости BC_1D и, следовательно, расстояние от точки A до плоскости BC_1D равно расстоянию от точки O_1 до этой плоскости. $O_1E = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



При решении данной задачи используем

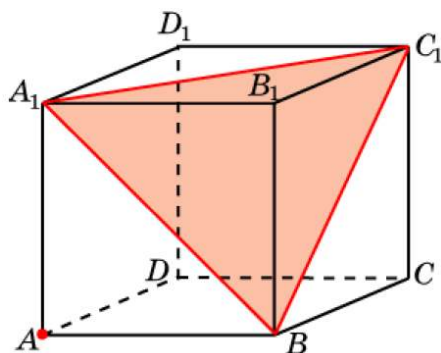
Метод подмены точки

Чтобы найти расстояние от точки до плоскости, мы можем взять любую точку с прямой, проходящей через данную точку параллельно плоскости

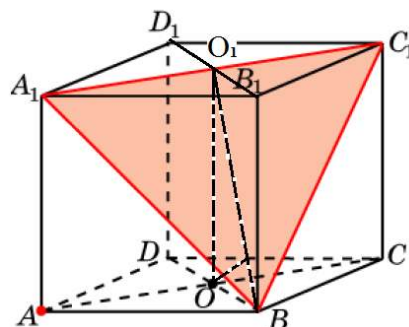
Модель 3. Метод подмены точки. (точка параллельной прямой).

Ручка «висит» параллельно столу. Расстояние от любой точки ручки до стола одинаково.

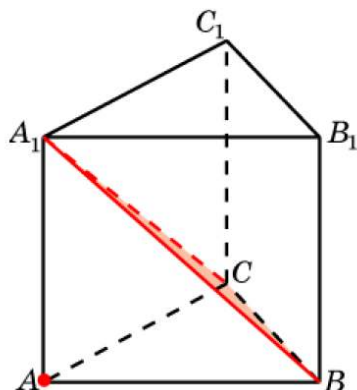
4. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости BA_1C_1 .



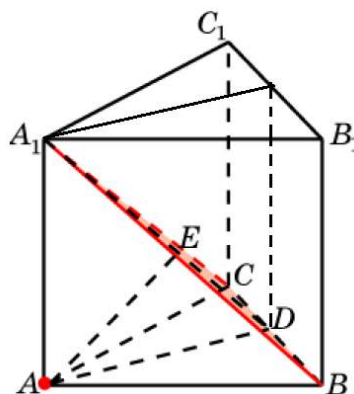
Плоскость A_1BC_1 перпендикулярна диагональной плоскости DBB_1 . O_1B линия пересечения плоскостей. Прямая AC параллельна плоскости BA_1C_1 . Следовательно, искомое расстояние равно расстоянию от центра O грани $ABCD$ куба до плоскости BA_1C_1 . $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



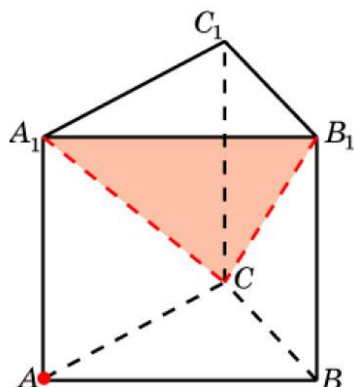
5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости BCA_1 .



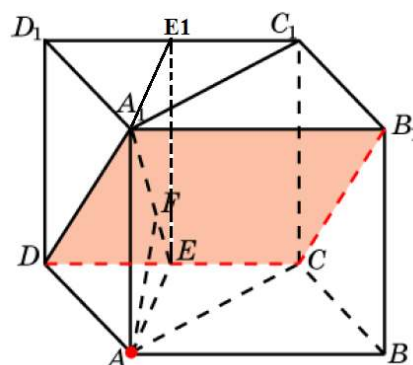
Плоскость A_1AD перпендикулярна наклонной плоскости. (BC ручка). A_1D ребро двугранного угла.
 $AE = \frac{\sqrt{21}}{7}$.



6. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости A_1B_1C .



Достроим данную треугольную призму до четырёхугольной. Плоскость A_1AE перпендикулярна наклонной плоскости. (DC ручка). A_1E ребро.
 $AF = \frac{\sqrt{21}}{7}$.



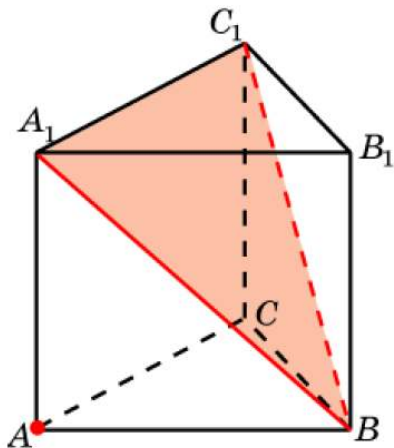
Или можно воспользоваться методом подмены точки.

Достраивая правильную треугольную призму до прямой четырёхугольной, помним, что в основании призмы лежит ромб.

7. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до

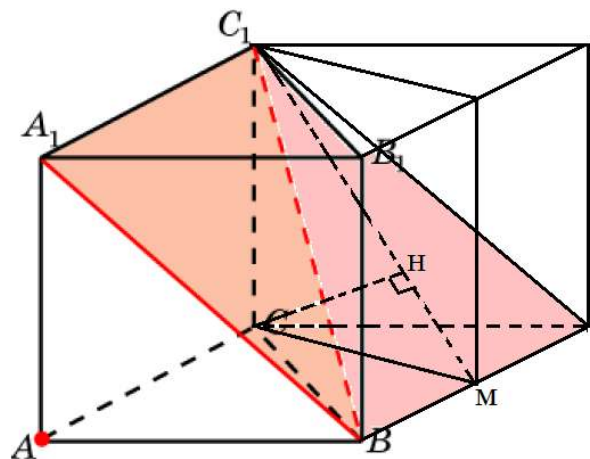
Достроим данную треугольную призму до четырёхугольной. Прямая AC параллельна наклонной плоскости и, следовательно, расстояние от точки A до этой плоскости равно расстоянию от точки C до

плоскости A_1C_1B



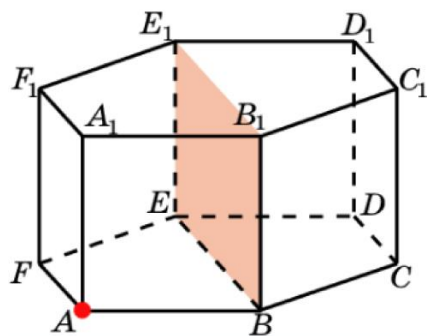
неё. Плоскость C_1CM перпендикулярна наклонной плоскости. (A_1C_1 ручка). C_1M ребро.

$$CH = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

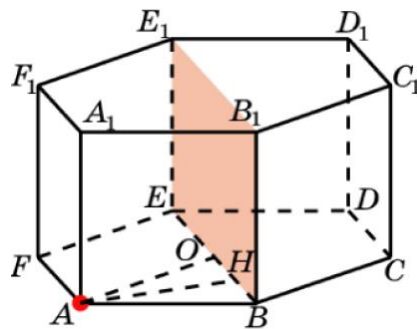


Можно решать эту задачу и не достраивая призму до четырёхугольной. Провести плоскость MBB_1 , где M середина ребра AC и найти расстояние от точки M до BM_1 , где M_1 середина ребра A_1C_1 . (Метод подмены точки)

8. В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости BEE_1 .



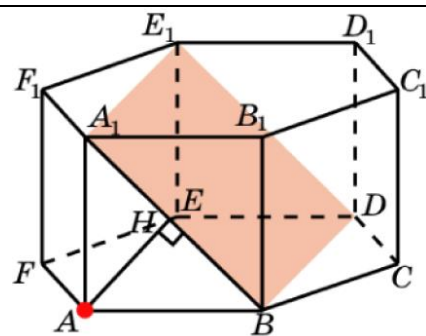
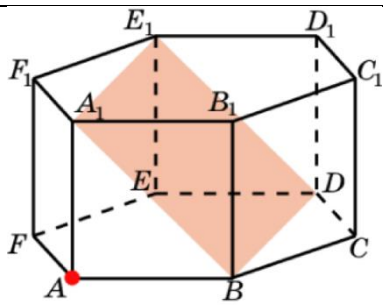
Плоскость дна перпендикулярна плоскости EVB_1 . EB ребро. $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



На мой взгляд, важно как можно чаще работать с правильной шестиугольной призмой. Правильный шестиугольник - это кладёшь для отработки базовых планиметрических навыков. Поэтому для решения задач с использованием изображения правильной шестиугольной призмы полезно иметь «перед глазами» изображение оригинала правильного шестиугольника.

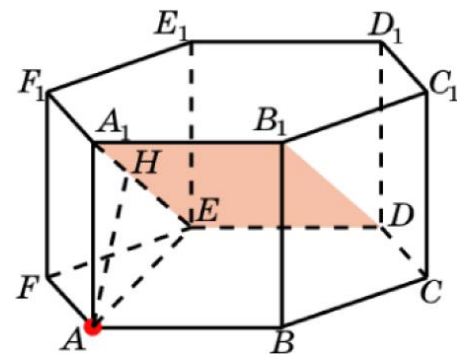
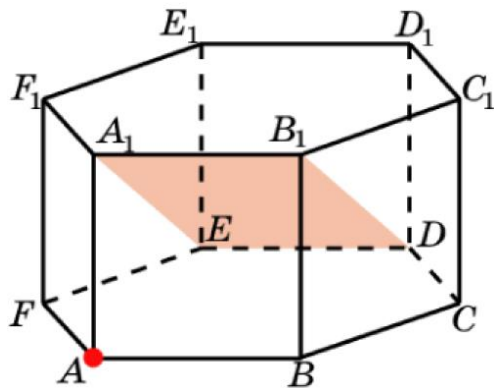
9. В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости BA_1E_1 .

Передняя грань перпендикулярна наклонной плоскости (BD ручка). A_1B ребро. $AH = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



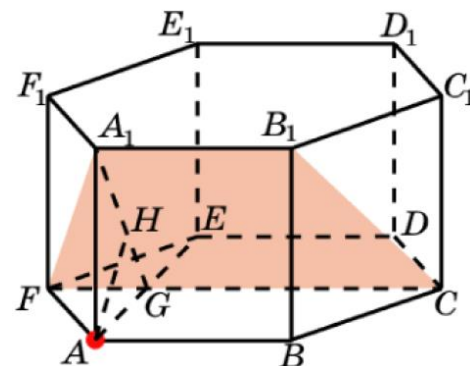
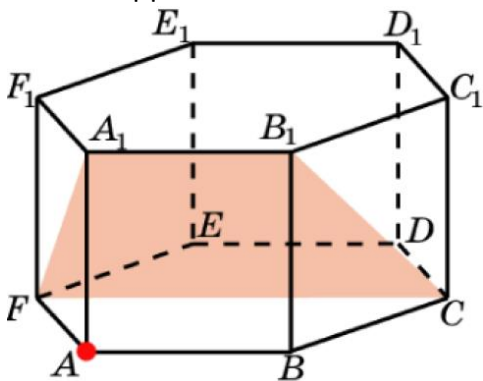
10. В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости A_1B_1D .

Плоскость A_1AE перпендикулярна наклонной плоскости (ED ручка). A_1E ребро. $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



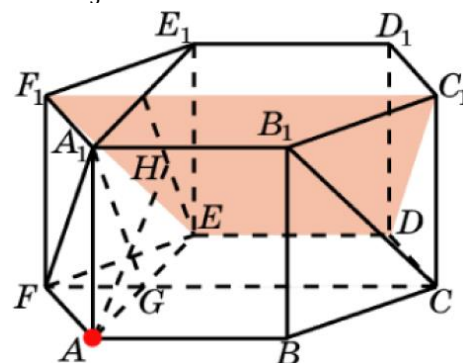
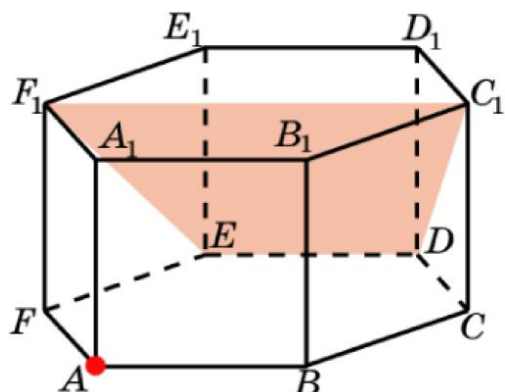
11. В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости A_1B_1C .

Плоскость A_1AE перпендикулярна наклонной плоскости (FC ручка). A_1G ребро. $AH = \frac{\sqrt{5}}{5}$.



12. В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости F_1C_1D .

$$AH = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

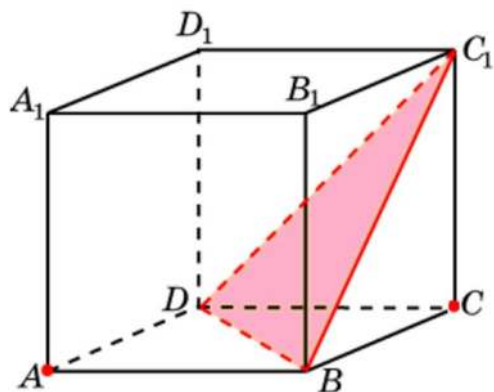


Данная плоскость параллельна плоскости A_1B_1C из предыдущей задачи, причем $AE = 2AG$. Следовательно, искомое расстояние AH от точки A до плоскости F_1C_1D в два раза больше расстояния от

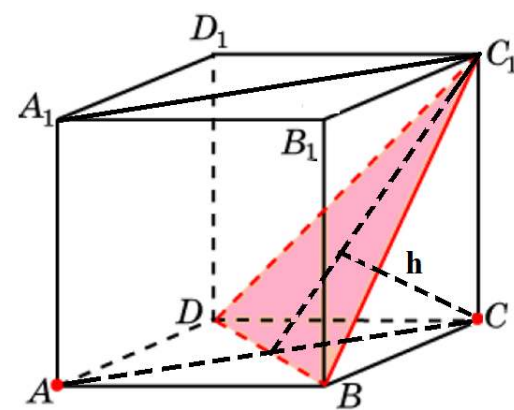
точки A до плоскости A_1B_1C .

Отдельно рассматриваем следующую задачу.

В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние до плоскости BC_1D от точек C , A , D_1 и B_1 .



В задаче 3 мы нашли расстояние от точки A до наклонной плоскости. От точки C данное расстояние найти проще. $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



Чтобы найти расстояние от точки A до данной плоскости, используем второй метод подмены точки, а именно: метод пропорций.

Метод пропорций.

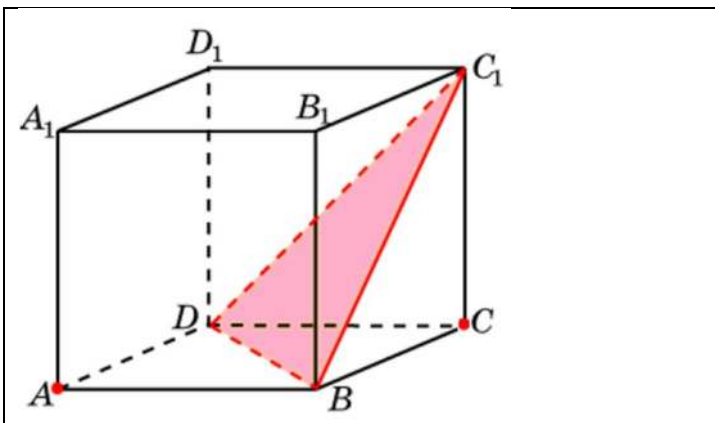
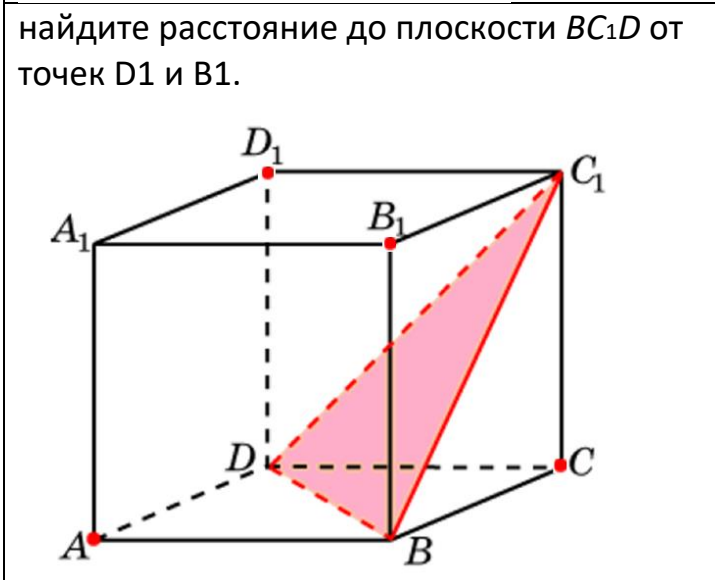
Если прямая AB пересекает некую плоскость в точке O и известно расстояние от точки B до этой плоскости, то отношение расстояний от концов отрезка до плоскости будет равно отношению расстояний от концов отрезка до точки O . $\left(\frac{\rho(A, \alpha)}{\rho(B, \alpha)} = \frac{OA}{OB} \right)$

Чаще всего отрезок пересекает некую плоскость в своей середине и метод пропорций легко визуализируется.

Модель 4. Метод подмены точки. (Метод пропорций.)

Берём карандаш (отрезок), протыкаем любую плоскость так, чтобы середина карандаша была точкой пересечения карандаша и плоскости, тогда расстояния от концов карандаша до данной плоскости будут одинаковыми.

Если карандаш (отрезок) пересекает плоскость в своей середине, то расстояния от концов карандаша до данной плоскости будут одинаковы.

	Так как отрезок AC пересекает нашу плоскость в своей середине, то расстояние от концов отрезка до плоскости одинаково и, следовательно, расстояние от точки A до плоскости BC_1D равно расстоянию от точки C до плоскости и равно $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
найдите расстояние до плоскости BC_1D от точек D1 и B1. 	Так как отрезок D1C пересекает нашу плоскость в своей середине, то расстояние от концов отрезка до плоскости одинаково и, следовательно, расстояние от точки D1 до плоскости BC_1D равно расстоянию от точки C до плоскости и равно $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Аналогично, расстояние от точки B1 до плоскости BC_1D равно расстоянию от точки C до плоскости и равно $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
Замечание. Примечательно, что для нахождения расстояния от точки B1 до нашей плоскости «методом пропорций» не нужно доказывать, что отрезок B1C перпендикулярен плоскости. Более того, мы не опускали перпендикуляры на плоскость из точек A, B1 и D1 при нахождении расстояний от них до этой плоскости.	