

Автор: Валиева Сирень Фардусовна

**МБОУ «СОШ№184 с углубленным изучением отдельных
предметов» им.М.И.Махмутова Советского района
г.Казани**

Основные методы решения логарифмических неравенств

1) $\log_a f(x) > b$ $a > 1 \Leftrightarrow f(x) > a^b$	3) $\log_a f(x) < b$ $a > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < a^b \\ f(x) > 0 \end{cases}$
2) $\log_a f(x) > b$ $0 < a < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < a^b \\ f(x) > 0 \end{cases}$	4) $\log_a f(x) < b$ $0 < a < 1 \Leftrightarrow f(x) > a^b$
5) $\log_{g(x)} f(x) > b$ $\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 1, \\ f(x) > g(x)^b; \\ 0 < g(x) < 1, \\ f(x) < g(x)^b, \\ f(x) > 0. \end{cases}$	6) $\log_{g(x)} f(x) < b$ $\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 1, \\ f(x) < g(x)^b, \\ f(x) > 0; \\ 0 < g(x) < 1, \\ f(x) < g(x)^b. \end{cases}$
7) $\log_a f(x) > \log_a h(x)$ $a > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > h(x), \\ h(x) > 0. \end{cases}$	9) $\log_a f(x) < \log_a h(x)$ $a > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < h(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$
8) $\log_a f(x) > \log_a h(x)$ $0 < a < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < h(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$	10) $\log_a f(x) < \log_a h(x)$ $0 < a < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > h(x), \\ h(x) > 0. \end{cases}$
11) $\log_{g(x)} f(x) < \log_{g(x)} h(x)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 1, \\ f(x) < h(x), \\ f(x) > 0; \\ 0 < g(x) < 1, \\ f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$	12) $\log_{g(x)} f(x) > \log_{g(x)} h(x)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 1, \\ f(x) > h(x), \\ h(x) > 0; \\ 0 < g(x) < 1, \\ f(x) < h(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$

Практика экзаменов показывает, что наибольшую сложность для школьников представляют трансцендентные неравенства. При решении этих неравенств методом интервалов вычисление значений функций в промежуточных точках может вызвать трудности вычислительного характера. Для рациональных функций такие вычисления несколько проще. Более того, при решении рациональных неравенств, записанных в

каноническом виде, расстановку знаков значений функций на промежутках можно проводить и без контрольных точек.

Чтобы устранить указанные проблемы и расширить возможности применения метода интервалов при решении трансцендентных неравенств можно использовать метод *рационализации неравенств*.

Метод рационализации заключается в замене сложного выражения $F(x)$ на более простое выражение $G(x)$ (в конечном счете, рациональное), при которой неравенство $G(x) \vee 0$ равносильно неравенству $F(x) \vee 0$ на области определения выражения $F(x)$.

Все условия равносильности формально точно такие же, как и для логарифмов с постоянным основанием, а потому легко запоминаются.

Выделим некоторые типовые выражения F и соответствующие им рационализирующие выражения G где f, g, h, p, q – выражения с переменной x ($h > 0, h \neq 1; f > 0; g > 0$), a – фиксированное число ($a > 0, a \neq 1$).

Выражение F	Выражение G
$\log_a f - \log_a g$	$(a - 1)(f - g)$
$\log_a f - 1$	$(a - 1)(f - a)$
$\log_a f$	$(a - 1)(f - 1)$
$\log_h f - \log_h g$	$(h - 1)(f - g)$
$\log_h f - 1$	$(h - 1)(f - a)$
$\log_h f$	$(h - 1)(f - 1)$
$\log_f h - \log_g h \ (g \neq 1, f \neq 1)$	$(f - 1)(g - 1)(h - 1)(g - f)$
$h^f - h^g \ (h > 0)$	$(h - 1)(f - g)$
$h^f - 1$	$(h - 1)f$
$f^h - g^h \ (f > 0, g > 0)$	$(f - g)h$
$ f - g $	$(f - g)(f + g)$

Рассмотренный метод рационализации обобщается на произведение и частное любого числа типовых выражений.

$$\log_h f \cdot \log_p g \vee 0 \Leftrightarrow (h-1)(f-1)(p-1)(g-1) \vee 0$$

- $\log_h f + \log_h g \vee 0 \Leftrightarrow (fg-1)(h-1) \vee 0$
- $\sqrt{f} - \sqrt{g} \vee 0 \Leftrightarrow f - g \vee 0$
- $\frac{h^f - h^g}{h^p - h^q} \vee 0 \Leftrightarrow \frac{f-g}{p-q} \vee 0$
- $f^h - g^p \vee 0 \Leftrightarrow (a-1)(\log_a f^h - \log_a g^p) \vee 0$

В указанных равносильных переходах символ « $\vee$ » заменяет один из знаков неравенств: « $>$ », « $<$ », « $\leq$ », « $\geq$ ».

Преимущество приведенных равносильных выражений состоит в том, что мы за *один шаг* освободились от логарифмов и переменных оснований, и теперь, если основание логарифма и логарифмируемые выражения являются рациональными функциями, можно воспользоваться классическим методом интервалов.

1. Решите неравенство

$$(0,3)^{2x^2-3x+6} < 0,00243.$$

Решение.

$$(0,3)^{2x^2-3x+6} < (0,3)^5.$$

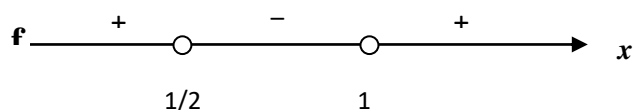
Функция $y = 0,3^t$ убывает на $\mathbb{R}$, т.к. $a = 0,3$; $0,3 < 1$.

Имеем: $2x^2 - 3x + 6 > 5$, $2x^2 - 3x + 1 > 0$.

Решим это неравенство методом интервалов.

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) = 0, \text{ при } x = 1, \quad x = \frac{1}{2}$$



$$f(x) > 0 \text{ на } (\infty; \frac{1}{2}) \cup (1; +\infty).$$

Ответ: $(\infty; \frac{1}{2}) \cup (1; +\infty)$.

2 . Решите неравенство

$$8^{\sqrt{8^x}} > 4096.$$

Решение.

$$8^{\sqrt{8^x}} > 8^4 \quad \text{ОДЗ: } x \in \mathbb{R}$$

Поскольку функция $y = 8^t$ возрастает ($a = 8$, $8 > 1$), то с учетом ОДЗ имеем:

$$\sqrt{8^x} > 4,$$

$$8^x > 16,$$

$$2^{3x} > 2^4 \quad \text{Функция } y = 2^t \text{ возрастает, т.к. } a = 2, 2 > 1.$$

$$\text{Имеем: } 3x > 4, \quad x > 1\frac{1}{3}.$$

Ответ: $(1\frac{1}{3}; +\infty)$.

3. Решите неравенство

$$\log_{0,5}(x^2 - 5x + 6) > -1.$$

Решение.

$$-\log_2(x^2 - 5x + 6) > -1, \quad \log_2(x^2 - 5x + 6) < 1, \quad \log_2(x^2 - 5x + 6) < \log_2 2.$$

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 < 2, & x^2 - 5x + 4 < 0, & (x-1)(x-4) < 0, & 1 < x < 4, \\ x^2 - 5x + 6 > 0; & x^2 - 5x + 6 > 0; & (x-2)(x-3) > 0; & x > 3, \\ & & & x < 2. \end{cases}$$

$$x \in (1; 2) \cup (3; 4).$$

Ответ: $(1; 2) \cup (3; 4).$

4. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2-3x}{x}\right) \geq -1.$$

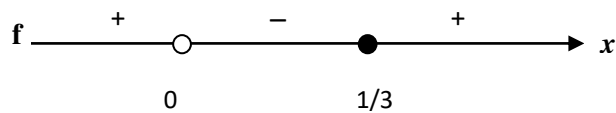
Решение.

$$\text{ОДЗ: } \frac{2-3x}{x} > 0, \quad 0 < x < \frac{2}{3}.$$

$$-\log_3\left(\frac{2-3x}{x}\right) \geq -1, \quad \log_3\left(\frac{2-3x}{x}\right) \leq 1, \quad \log_3\left(\frac{2-3x}{x}\right) \leq \log_3 3.$$

Функция $y = \log_3 t$ возрастает т.к. $a = 3, 3 > 1$ при $t > 0$ то имеем:

$$\frac{2-3x}{x} \leq 3, \quad \frac{2-3x}{x} - 3 \leq 0, \quad \frac{2-3x-3x}{x} \leq 0, \quad \frac{2-6x}{x} \leq 0, \quad \frac{6x-2}{x} \geq 0, \quad \frac{x-\frac{1}{3}}{x} \geq 0.$$



С учетом ОДЗ имеем: $x \in [\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$.

Ответ: $[\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$.

5. Решить неравенство $2^x + 2^{|x|} \geq 2\sqrt{2}$.

Решение.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

$$1. \quad x \geq 0, \quad |x| = x.$$

$$2^x + 2^x \geq 2\sqrt{2}, \quad 2 \cdot 2^x \geq 2\sqrt{2}, \quad 2^x \geq \sqrt{2}, \quad 2^x \geq 2^{\frac{1}{2}}.$$

Функция $y = 2^t$ возрастает, т.к. $a = 2, 2 > 1$

$$\text{Имеем: } \begin{cases} x \geq \frac{1}{2}, \\ x \geq 0; \end{cases}$$

$$2. \quad x < 0, \quad |x| = -x$$

$$2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2},$$

Пусть $2^x = t$, $t > 0$. Тогда имеем: $t + \frac{1}{t} - 2\sqrt{2} \geq 0$.

Решим методом интервалов

$$f(t) = \frac{t^2 - 2\sqrt{2}t + 1}{t}, \quad f(t) = 0, \quad t^2 - 2\sqrt{2}t + 1 = 0, \quad D = 8 - 4 = 4,$$

$$t_1 = \frac{2\sqrt{2} + 2}{2} = \sqrt{2} + 1; \quad t_2 = \frac{2\sqrt{2} - 2}{2} = \sqrt{2} - 1.$$



$t \in (0; \sqrt{2} - 1] \cup [\sqrt{2} + 1; +\infty)$. Вернемся к прежней переменной.

Имеем,

$$2^x \leq \sqrt{2} - 1,$$

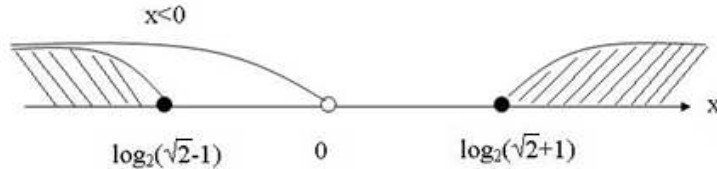
$$2^x \geq \sqrt{2} + 1,$$

$$\log_2 2^x \leq \log_2 (\sqrt{2} - 1),$$

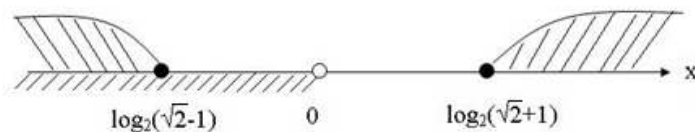
$$\log_2 2^x \geq \log_2 (\sqrt{2} + 1),$$

$$x \leq \log_2 (\sqrt{2} - 1).$$

$$x \geq \log_2 (\sqrt{2} + 1).$$



Учитывая, что $x < 0$ получаем



$$x \in (-\infty; \log_2 (\sqrt{2} - 1)].$$

Ответ: $(-\infty; \log_2 (\sqrt{2} - 1)] \cup [\frac{1}{2}; +\infty)$.

6. Решите неравенство

$$8 \cdot \frac{3^{x-2}}{3^x - 2^x} > 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x.$$

Решение.

Учитывая, что $3^x \neq 0$, разделим числитель и знаменатель дроби $\frac{3^{x-2}}{3^x - 2^x}$ на 3^x .

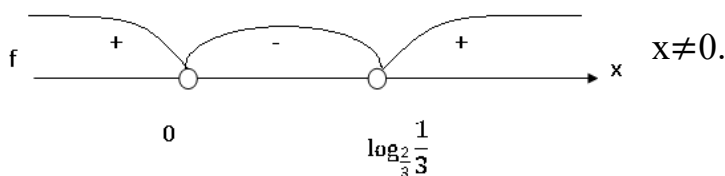
$$8 \cdot \frac{\frac{1}{9}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^x} > 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x, \quad \frac{\frac{8}{9} - \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^x\right)\left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x\right)}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^x} > 0, \quad \frac{\frac{8}{9} - \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{2x}\right)}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^x} > 0, \quad \frac{-\frac{1}{9} + \left(\frac{2}{3}\right)^{2x}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^x} > 0,$$

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - \frac{1}{9}}{\left(\frac{2}{3}\right)^x - 1} < 0, \quad f(x) = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - \frac{1}{9}}{\left(\frac{2}{3}\right)^x - 1},$$

$$f(x) = 0, \quad \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - \frac{1}{9} = 0, \right\} \quad x = \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{3},$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x - 1 \neq 0;$$

$$x \in (0; \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{3}).$$



Ответ: $(0; \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{3})$.

7. Решите неравенство

$$3^{72} \cdot 3^{-x} \cdot 3^{\sqrt{x}} > 1.$$

Решение.

$$3^{72} \cdot 3^{-x} \cdot 3^{\sqrt{x}} > 1, \quad 3 > 1, \quad y = 3^t - \text{возрастающая функция,}$$

$$3^{72-x-\sqrt{x}} > 3^0, \quad 72 - x - \sqrt{x} > 0, \quad x + \sqrt{x} - 72 < 0,$$

Пусть $\sqrt{x} = t$, $t \geq 0$.

$$t^2 + t - 72 < 0, \quad (t+9)(t-8) < 0, \quad -9 < t < 8.$$

Значит, $0 \leq \sqrt{x} < 8$, $0 \leq x < 64$.

Ответ $[0; 64)$.

8. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+1) > \log_3(x-2).$$

Решение. $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) > \log_3(x-2),$

$$\log_3 \frac{1}{x+1} > \log_3 (x-2), \quad \begin{cases} \frac{1}{x+1} > 0, \\ x-2 > 0, \\ \frac{1}{x+1} > x-2; \end{cases} \quad \begin{cases} x+1 > 0, \\ x-2 > 0, \\ \frac{x^2-x-3}{x+1} < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x+1 > 0, \\ x-2 > 0, \\ \frac{\left(x-\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)}{x+1} < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2, \\ \left[\begin{array}{l} x < \frac{1-\sqrt{13}}{2}, \\ -1 < x < \frac{1+\sqrt{13}}{2}; \end{array} \right. \end{cases} \quad 2 < x < \frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

Решением данного неравенства является $(2; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$.

Ответ: $(2; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$.

9. Решите неравенство

$$\left(\frac{x}{10}\right)^{\lg x - 2} < 100.$$

Решение.

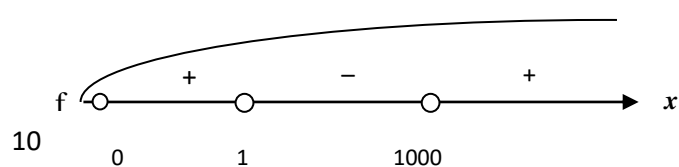
ОДЗ: $x > 0$.

$$\left(\frac{x}{10}\right)^{\lg x - 2} < 100, \left(\frac{x}{10}\right)^{\lg x} \cdot \left(\frac{x}{10}\right)^{-2} < 100, \left(\frac{x}{10}\right)^{\lg x} \cdot \frac{10^2}{x^2} < 100, \left(\frac{x}{10}\right)^{\lg x} \cdot \frac{1}{x^2} < 1,$$

$$\frac{x^{\lg x}}{10^{\lg x}} \cdot \frac{1}{x^2} - 1 < 0, \frac{x^{\lg x} - x^3}{x^3} < 0.$$

$$f(x) = \frac{x^{\lg x} - x^3}{x^3}, \quad f(x) = 0.$$

$$\frac{x^{\lg x} - x^3}{x^3} = 0, \quad \begin{cases} x^{\lg x} - x^3 = 0, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^{\lg x} = x^3, \\ x \neq 0; x=1, \end{cases} \quad \begin{cases} \lg x = 3, \\ x = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x=1000, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad x \neq 0.$$



$f(x) < 0$ при $x \in (1; 1000)$.

Ответ: $(1; 1000)$.

10. Решите неравенство

$$\log_{|x|}(\sqrt{9-x^2}-x-1) \geq 1.$$

Решение.

$$\begin{cases} \log_{|x|}(\sqrt{9-x^2}-x-1) \geq 1, & \log_{|x|}(\sqrt{9-x^2}-x-1) \geq \log_{|x|}|x|, \\ \begin{cases} |x| > 0, \\ |x| \neq 0, \end{cases} & \begin{cases} x \neq 0; x \neq 1; x \neq -1, \\ \sqrt{9-x^2} > x+1, \end{cases} \\ \sqrt{9-x^2}-x-1 > 0, & (|x|-1)(\sqrt{9-x^2}-x-1-|x|) \geq 0; \end{cases}$$

$$(|x|-1)(\sqrt{9-x^2}-x-1-|x|) \geq 0;$$

$$x \neq 0; x \neq 1; x \neq -1,$$

$$x \neq 0; x \neq 1; x \neq -1,$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x+1 < 0, \\ 9-x^2 \geq 0, \end{cases} & \begin{cases} x < -1, \\ -3 \leq x \leq 3, \end{cases} \\ \begin{cases} x+1 \geq 0, \end{cases} & \begin{cases} x \geq -1, \end{cases} \end{cases}$$

$$9-x^2 > (x+1)^2, \quad ,$$

$$\frac{-1-\sqrt{17}}{2} < x < \frac{\sqrt{17}-1}{2},$$

$$(|x|-1)(\sqrt{9-x^2}-x-1-|x|) \geq 0;$$

$$(|x|-1)(\sqrt{9-x^2}-x-1-|x|) \geq 0;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \neq 0; x \neq -1; x+1, \\ -3 \leq x < -1, \\ -1 \leq x < \frac{\sqrt{17}-1}{2}, \\ -\sqrt{8} \leq x \leq -1, \\ \frac{-2+\sqrt{44}}{5} \leq x \leq 1; \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} -\sqrt{8} \leq x \leq -1, \\ \frac{-2+\sqrt{44}}{5} \leq x \leq 1. \end{array} \right.$$

Ответ: $[-\sqrt{8}; -1) \cup [\frac{-2+\sqrt{44}}{5}; 1)$.

11. Решите неравенство

$$\log_{|x+2|} (4+7x-2x^2) \leq 2.$$

Решение. $\log_{|x+2|} (4+7x-2x^2) \leq 2,$

$$\frac{\log_2 (4+7x-2x^2)}{\log_2 |x+2|} - 2 \leq 0, \quad \frac{\log_2 (4+7x-2x^2) - \log_2 |x+2|^2}{\log_2 |x+2|} \leq 0,$$

$$\frac{\log_2 (4+7x-2x^2) - \log_2 |x+2|^2}{\log_2 |x+2| - \log_2 1} \leq 0.$$

Если $a \geq 0, b > 0, c > 1$, то $\log_c a - \log_c b$ и $(a - b)$ — одного знака

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(4+7x-2x^2) - (x+2)^2}{|x+2| - 1} \leq 0, \\ 4+7x-2x^2 > 0. \end{array} \right.$$

Воспользуемся тем, что числа $|t| - 1$ и $t^2 - 1$ одного знака: $\left\{ \begin{array}{l} \frac{(4+7x-2x^2) - (x+2)^2}{(x+2)^2 - 1} \leq 0, \\ 2x^2 - 7x - 4 < 0; \end{array} \right.$

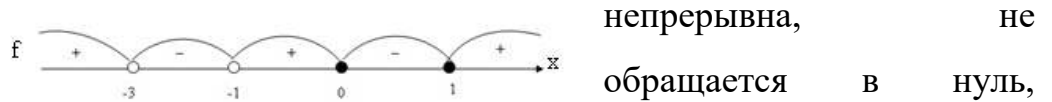
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{4+7x-2x^2-x^2-4x-4}{(x+2-1)(x+2+1)} \leq 0, \\ 2 \cdot (x-4) \cdot (x+0,5) < 0; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 2x^2 - 7x - 4 = 0 \\ D = 49 + 32 = 81, \\ x_{1,2} = \frac{7 \pm 9}{4} \\ x_1 = 4, x_2 = -0,5 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{-3x^2+3x}{(x+1)(x+3)} \leq 0, \\ (x-4)(x+0,5) < 0; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{-3x^2+3x}{(x+1)(x+3)} \geq 0, \\ (x-4)(x+0,5) < 0; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{x(x-1)}{(x+1)(x+3)} \geq 0, \\ (x-4)(x+0,5) < 0. \end{array} \right.$$

Решение первого неравенства системы:

$$\frac{x(x-1)}{(x+1)(x+3)} \geq 0 \quad (1)$$

Числа -3, -1, 0, 1 разбивают числовую прямую на интервалы $(-\infty; -3)$; $(-3; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$; $(1; +\infty)$ на каждом из которых функция $f(x) = \frac{x(x-1)}{(x+1)(x+3)}$



поэтому сохраняет постоянный знак. Так как числа -3, -1, 0, 1 различные, действительные, то имеем чередование знаков

$$f(x) \geq 0 \text{ при } \begin{cases} x < -3, \\ -1 < x \leq 0, \\ x \geq 1. \end{cases} \text{ Решением неравенства (1) является } -0,5 < x < 4.$$

$$\text{Следовательно, } \begin{cases} x < -3, \\ -1 < x \leq 0, \\ x \geq 1, \end{cases} \quad \begin{cases} -0,5 < x < 4, \\ 1 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Ответ: $(-0,5; 0] \cup [1; 4)$.

12. Решите неравенство

$$\log_{\frac{3x-1}{x+2}}(2x^2 + x - 1) \geq \log_{\frac{3x-1}{x+2}}(11x - 6 - 3x^2).$$

$$\log_{\frac{3x-1}{x+2}}(2x^2 + x - 1) \geq \log_{\frac{3x-1}{x+2}}(11x - 6 - 3x^2),$$

Решение.

$$\begin{cases} \frac{3x-1}{x+2} > 0, \\ \frac{3x-1}{x+2} < 1, \\ 2x^2 + x - 1 \leq 11x - 6 - 3x^2, \\ 2x^2 + x - 1 > 0. \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x - \frac{1}{3}}{x+2} > 0, \\ \frac{3x-1-x-2}{x+2} < 0, \\ 5x^2 - 10x + 5 \leq 0, \\ 2x^2 + x - 1 > 0. \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x - \frac{1}{3}}{x+2} > 0, \\ \frac{2x-3}{x+2} < 0, \\ x^2 - 2x + 1 \leq 0, \\ 2x^2 + x - 1 > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3x-1}{x+2} > 1, \\ 2x^2 + x - 1 \geq 11x - 6 - 3x^2, \\ 11x - 6 - 3x^2 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{3x-1-x-2}{x+2} > 0, \\ 5x^2 - 10x + 5 \geq 0, \\ 3x^2 - 11x + 6 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2x-3}{x+2} > 0, \\ x^2 - 2x + 1 \geq 0, \\ 3x^2 - 11x + 6 < 0; \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x-1}{3} > 0, \\ x+2 \\ \frac{x-1,5}{x+2} < 0, \\ (x-1)^2 \leq 0, \\ 2(x+1)(x-\frac{1}{2}) > 0. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 2x^2 + x - 1 = 0, \\ x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{2}; \\ 3x^2 - 11x + 6 = 0, \\ D = 121 - 72 = 49, \\ x_{1,2} = \frac{11 \pm 7}{6} \\ x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = 3. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x < -2, \\ x > \frac{1}{3}; \\ -2 < x < 1,5, \\ x = 1, \\ x < -1, \\ x > \frac{1}{2}; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x < -2, \\ x > 1,5; \\ \frac{2}{3} < x < 3; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x = 1, \\ 1,5 < x < 3. \end{array} \right.$$

Ответ: $\{1\} \cup (1,5; 3)$.

13. Решите неравенство

$$\frac{4^{x^2+3x-2} - 0,5^{2x^2+2x-1}}{5^x - 1} \leq 0;$$

Решение. ОДЗ: $5^x - 1 \neq 0$; $x \neq 0$.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{4^{x^2+3x-2} - 0,5^{2x^2+2x-1}}{5^x - 1} \leq 0; \quad \frac{4^{x^2+3x-2} - 2^{-2x^2-2x+1}}{5^x - 1} \leq 0.$$

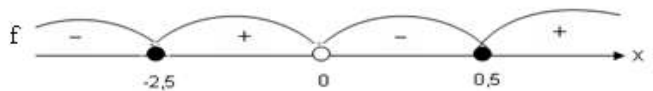
Решим неравенство методом интервалов.

$$\text{Пусть } f(x) = \frac{4^{x^2+3x-2} - 2^{-2x^2-2x+1}}{5^x - 1}$$

Нули функции:

$$\frac{4^{x^2+3x-2} - 2^{-2x^2-2x+1}}{5^x - 1} = 0, \quad \begin{cases} 4^{x^2+3x-2} = 2^{-2x^2-2x+1}, \\ x \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2,5, \\ x = 0,5 \\ x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2,5, \\ x = 0,5. \end{cases}$$



$f(x) \leq 0$ на $[-2,5; 0) \cup (0; 0,5]$.

Ответ. $[-2,5; 0) \cup (0; 0,5]$.

14. Решите неравенство

$$\frac{\log_{0,2} \frac{1}{2x-1} + \log_5 (2-x)}{\log_5 (2x-1) + \log_{0,2} \frac{1}{3-2x}} \geq 0.$$

Решение.

ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x-1 > 0, \\ 2-x > 0, \\ 3-2x > 0, \\ \log_5 (2x-1) + \log_{0,2} \frac{1}{3-2x} \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > \frac{1}{2}, \\ x < 2, \\ x < 1,5, \\ \log_5 (2x-1) \neq \log_5 \frac{1}{3-2x}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > \frac{1}{2}, \\ x < 2, \\ x < 1,5, \\ x \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 0,5 < x < 1, \\ 1 < x < 1,5. \end{cases}$$

Преобразуем неравенство:

$$\frac{\log_5 (2x-1) + \log_5 (2-x)}{\log_5 (2x-1) + \log_5 (3-2x)} \geq 0;$$

$$\frac{\log_5 (2x-1) \cdot (2-x)}{\log_5 (2x-1) \cdot (3-2x)} \geq 0.$$

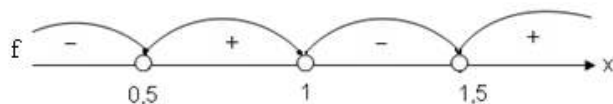
Решим неравенство методом интервалов

Пусть $f(x) = \frac{\log_5 ((2x-1) \cdot (2-x))}{\log_5 ((2x-1) \cdot (3-2x))}.$

Нули функции

$$\frac{\log_5 ((2x-1) \cdot (2-x))}{\log_5 ((2x-1) \cdot (3-2x))} = 0, \quad \begin{cases} \log_5 ((2x-1) \cdot (2-x)) = 0, \\ \log_5 ((2x-1) \cdot (3-2x)) \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (2x-1) \cdot (2-x) = 1, \\ (2x-1) \cdot (3-2x) \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = 0, \\ 4x^2 - 3x + 4 \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x = 1, \\ x = 1,5, \end{cases} \\ 4x^2 - 3x + 4 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ x = 1,5. \end{cases}$$



Решением данного неравенства является $(0,5; 1)$.

Ответ. $(0,5; 1)$.

15. Решите неравенство

$$\log_{2x+3} x^2 < 1.$$

Решение.

$$\log_{2x+3} x^2 < 1, \quad \log_{2x+3} x^2 < \log_{2x+3} (2x+3),$$

$$\begin{cases} 2x+3 > 0, \\ x \neq 0, \\ (2x+3-1) \cdot (x^2 - 2x - 3) < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > -1,5, \\ x \neq 0, \\ (2x+2) \cdot (x^2 - 2x - 3) < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > -1,5, \\ x \neq 0, \\ (x+1) \cdot (x+1) \cdot (x-3) < 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -1,5, \\ x \neq 0, \\ (x+1)^2 \cdot (x-3) < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > -1,5, \\ x \neq 0, \\ \begin{cases} x < -1, \\ -1 < x < 3; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} -1,5 < x < -1, \\ -1 < x < 0, \\ 0 < x < 3. \end{cases}$$

Решением исходного неравенства является $(-1,5; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 3)$.

Ответ. $(-1,5; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 3)$.

16. Решите неравенство

$$\log_x (\log_9 (3^x - 9)) < 1.$$

Решение.

$$\log_x (\log_9 (3^x - 9)) < 1.$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} 3^x - 9 > 0, \\ \log_9 (3^x - 9) > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 3^x > 9, \\ \log_9 (3^x - 9) > \log_9 1, \\ x > 0, \\ x \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2, \\ 3^x - 9 > 1, \\ x > 0, \\ x \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2, \\ 3^x > 10, \\ x > 0, \\ x \neq 1; \end{cases} \quad x > \log_3 10.$$
$$\begin{cases} x > 2, \\ \log_3 3^x > \log_3 10; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2, \\ x > \log_3 10; \end{cases}$$

$$\log_x (\log_9 (3^x - 9)) < 1, \quad \log_x (\log_9 (3^x - 9)) < \log_x x, \text{ т.к. } x > \log_3 10$$

$$\log_9 (3^x - 9) < x, \quad \log_9 (3^x - 9) < \log_9 9^x, \quad 3^x - 9 < 9^x, \quad 3^{2x} - 3^x + 9 > 0,$$

Пусть $3^x = t$, $t > 0$

$$t^2 - t + 9 > 0, \quad \begin{cases} t^2 - t + 9 = 0 \\ D = 1 - 36 = -35, \\ D < 0. \end{cases}$$

$t^2 - t + 9 > 0$ при всех допустимых значениях t , и значит, $3^{2x} - 3^x + 9 > 0$ при всех допустимых значениях x .

Следовательно, решением данного неравенства является $x > \log_3 10$.

Ответ. $x > \log_3 10$.

17. Решите неравенство

$$\frac{\log_2(3 \cdot 2^{x-1} - 1)}{x} \geq 1$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 3 \cdot 2^{x-1} - 1 > 0, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2^{x-1} > \frac{1}{3}, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 1 > \log_2 \frac{1}{3}, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > \log_2 \frac{2}{3}, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \log_2 \frac{2}{3} < x < 0, \\ x > 0. \end{cases} \text{ Преобразуем}$$

неравенство

$$\frac{\log_2(3 \cdot 2^{x-1} - 1)}{x} - 1 \geq 0, \quad \frac{\log_2(3 \cdot 2^{x-1} - 1) - x}{x} \geq 0.$$

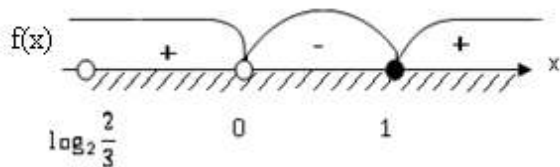
Решим неравенство методом интервалов

$$\text{Пусть } f(x) = \frac{\log_2(3 \cdot 2^{x-1} - 1) - x}{x}$$

Нули функции

$$\frac{\log_2(3 \cdot 2^{x-1} - 1) - x}{x} = 0; \quad \begin{cases} \log_2(3 \cdot 2^{x-1} - 1) - x, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3 \cdot 2^{x-1} - 1 = 2^x, \\ x \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2} \cdot 2^x - 2^x = 1, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2^x \cdot \frac{1}{2} = 1, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2^x = 2, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad x = 1.$$



$$x \in (\log_2 \frac{2}{3}; 0) \cup [1; +\infty).$$

Ответ. $(\log_2 \frac{2}{3}; 0) \cup [1; +\infty).$

18. Решите неравенство

$$\log_5 (x + 2) + \log_5 (1 - x) \leq \log_5 ((1 - x) (x^2 - 8x - 8)).$$

Решение.

$$\log_5 (x + 2) + \log_5 (1 - x) \leq \log_5 ((1 - x) (x^2 - 8x - 8)),$$

$$\begin{cases} x + 2 > 0, \\ 1 - x > 0, \\ x^2 - 8x - 8 > 0, \\ \log_5 (x + 2)(1 - x) \leq \log_5 ((1 - x) (x^2 - 8x - 8)); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -2, \\ x < 1, \\ (x - (4 - 2\sqrt{6}))(x - (4 + 2\sqrt{6})) > 0, \\ (x + 2)(1 - x) \leq (1 - x) (x^2 - 8x - 8); \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 8x - 8 = 0 \\ D_1 = 16 + 8 = 24 \\ x_{1,2} = 4 \pm 2\sqrt{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 < x < 1, \\ \begin{cases} x < 4 - 2\sqrt{6}, \\ x > 4 + 2\sqrt{6}, \end{cases} \\ (1 - x) (x + 2 - x^2 + 8x + 8) \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -2 < x < 4 - 2\sqrt{6}, \\ (1 - x)(-x^2 + 9x + 10) \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 < x < 4 - 2\sqrt{6}, \\ (x - 1)(x^2 - 9x - 10) \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 9x - 10 = 0, \\ x_1 = -1, x_2 = 10. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 < x < 4 - 2\sqrt{6}, \\ (1 - x)(x + 1)(x - 1) \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -2 < x < 4 - 2\sqrt{6}, \\ \begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ x \geq 10; \end{cases} \end{cases} \quad -2 < x < 4 - 2\sqrt{6}.$$

$$-2 < x < 4 - 2\sqrt{6}. \quad \text{Ответ.}$$

19. Решите неравенство

$$\log_{\frac{x}{3}} (\log_x \sqrt{3 - x}) \geq 0.$$

Решение. $\log_{\frac{x}{3}}(\log_x \sqrt{3-x}) \geq 0,$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x > 0, \\ \frac{1}{3}x \neq 1, \\ \log_x \sqrt{3-x} > 0, \\ (x-1)(\sqrt{3-x}-1) > 0, \\ (\frac{1}{3}x-1)(\log_x \sqrt{3-x}-1) \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 3, \\ \sqrt{3-x} > 0, \\ (x-1)(\sqrt{3-x}-1) > 0, \\ (\frac{1}{3}x-1)(\log_x \sqrt{3-x}-1) \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 3, \\ x < 3, \\ 1 < x < 2, \\ \frac{\sqrt{13}-1}{2} \leq x < 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x < 3, \\ 1 < x < 2, \\ \frac{\sqrt{13}-1}{2} \leq x < 3; \end{cases} \quad \frac{\sqrt{13}-1}{2} \leq x < 2.$$

Решением неравенства является

Ответ. $\left[\frac{\sqrt{13}-1}{2}; 2 \right).$ $\left[\frac{\sqrt{13}-1}{2}; 2 \right)$

20. Решите неравенство

$$\log_{x+1} (19+18x-x^2) - \frac{1}{16} \log_{x+1}^2 (x-19)^2 \geq 2.$$

Решение.

$$\log_{x+1} (19+18x-x^2) - \frac{1}{16} \log_{x+1}^2 (x-19)^2 \geq 2. \quad \begin{cases} 19+18x-x^2 = 0, \\ x^2-18x-19 = 0, & \log_{x+1} (-(x+1)(x-19)) - \frac{4}{16} \log_{x+1}^2 |x-19| \geq 2, \\ x_1 = -1, \quad x_2 = 19. & \log_{x+1} ((x+1)(19-x)) - \frac{1}{4} \log_{x+1}^2 |19-x| \geq 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)(19-x) > 0, \\ x+1 > 0, \\ x+1 \neq 1, \\ \log_{x+1} (x+1) + \log_{x+1} |19-x| - \frac{1}{4} \log_{x+1}^2 |19-x| - 2 \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+1 > 0, \\ x-19 < 0, \\ x \neq 0, \\ 1 + \log_{x+1} (19-x) - \frac{1}{4} \log_{x+1}^2 (19-x) - 2 \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -1, \\ x < 19, \\ x \neq 0, \\ \log_{x+1}^2 (19-x) - 4 \log_{x+1} (19-x) + 4 \leq 0;. \end{cases}$$

$$\log_{x+1} (19+18x-x^2) - \frac{1}{16} \log_{x+1}^2 (x-19)^2 \geq 2,$$

$$\begin{cases} x > -1, \\ x \neq 0, \\ x < 19, \\ (\log_{x+1} (19-x) - 2)^2 \leq 0;. \end{cases} \quad \begin{cases} x > -1, \\ x \neq 0, \\ x < 19, \\ \log_{x+1} (19-x) - 2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -1, \\ x \neq 0, \\ x < 19, \\ \log_{x+1} (19-x) = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x > -1, \\ x \neq 0, \\ x < 19, \\ (x+1)^2 = 19-x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -1, \\ x \neq 0, \\ x < 19, \\ x^2 + 2x + 1 - 19 + x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > -1, \\ x \neq 0, \\ x < 19, \\ x^2 + 3x - 18 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > -1, \\ x \neq 0, \\ x < 19, \\ \begin{cases} x = -6, \\ x = 3; \end{cases} \end{cases} \quad x = 3.$$

Ответ. 3.

21. Решите неравенство

$$\frac{\log_7(9-x) - \log_{21}(9-x)}{\log_{21} x - \log_{63} x} \leq 1 + \log_7 9.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } 0 < x < 9, x \neq 1.$$

Проведем преобразования неравенства, равносильные на области определения.

$$\frac{\log_7(9-x) - \frac{\log_7(9-x)}{\log_7 21}}{\frac{\log_7 x}{\log_7 21} - \frac{\log_7 x}{\log_7 63}} \leq \log_7 63,$$

$$\frac{\frac{\log_7(9-x) \cdot (\log_7 21 - 1)}{\log_7 21}}{\frac{\log_7 x (\log_7 63 - \log_7 21)}{\log_7 21 \cdot \log_7 63}} \leq \log_7 63,$$

$$\frac{\log_7(9-x)}{\log_7 x} \leq 1,$$

$$\log_x(9-x) \leq 1.$$

Применяя метод рационализации, получаем неравенство

$$(x-1)(9-x-x) \leq 0,$$

$$(x-1)(2x-9) \geq 0.$$

$$x \in (-\infty; 1] \cup [4,5; +\infty).$$

С учетом области определения решением исходного неравенства является $(0; 1) \cup [4,5; 9)$.

Ответ. $(0; 1) \cup [4,5; 9)$.

22. Решите неравенство

$$\frac{\log_{3^{2x-4}}(x+2)}{\log_{3^{x-2}} x^4} \leq \frac{1}{4}.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 3^{2x-4} \neq 1, \\ 3^{x-2} \neq 1, \\ x^4 \neq 0, \\ x^4 \neq 1, \\ x+2 > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq 2, \\ x \neq 0, \\ x \neq \pm 1, \\ x > -2. \end{cases}$$

Проведем преобразования неравенства, равносильные на области определения.

$$\frac{\log_{3^{2(x-2)}}(x+2)}{4 \log_{3^{x-2}} |x|} \leq \frac{1}{4},$$

$$\frac{\frac{1}{2} \log_{3^{x-2}}(x+2)}{\log_{3^{x-2}} |x|} \leq 1,$$

$$\log_{|x|}(x+2) \leq 2.$$

Применяя метод рационализации, получаем неравенство

$$(|x| - 1)(x + 2 - |x|^2) \leq 0, \quad (|x| - 1)(|x|^2 - x - 2) \geq 0.$$

$$x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty).$$

С учетом ОДЗ решением исходного неравенства является

$$(-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (2; +\infty).$$

Ответ. $(-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (2; +\infty).$

