

Решаем тригонометрические уравнения и системы тригонометрических уравнений.

Автор – составитель:

Валиева Сирень Фардусовна,
учитель высшей квалификационной категории МБОУ
«СОШ с углубленным изучением отдельных предметов №184
им.М.И.Махмутова» Советского района г.Казани

В предлагаемом пособии представлены рассмотрены основные методы и приемы решения тригонометрических уравнений и систем тригонометрических уравнений. Даны подробные решения с пояснениями и комментариями к каждому заданию и ответы.

Пособие предназначено для учителей и методистов с целью организации углубленной подготовки выпускников школ к ЕГЭ по математике, будет полезно также учащимся 10-11 классов, желающим самостоятельно познакомиться с основными приемами и методами решения задач высокого уровня. Цель данного пособия – дать возможность учащимся 10-х, 11-х классов потренироваться в выполнении таких видов заданий, которые включаются в ЕГЭ, проверить себя по темам школьного курса и подготовиться к предстоящему экзамену. Разобравшись с предложенным решением конкретного задания, попытайтесь его воспроизвести, подумайте, нет ли решения рациональнее.

Общее требование к выполнению заданий : решение должно быть математически грамотным, полным, должны быть рассмотрены все возможные случаи.

Ключевым признаком заданий на решение тригонометрических уравнений является необходимость отбора полученных в результате решения того или иного уравнения корней в соответствии с вытекающими из условия ограничениями. При этом для решения задачи необходимо уверенное владение навыками решения всех типов тригонометрических уравнений и систем уравнений.

Тригонометрия – традиционно один из самых проблемных разделов школьной математики. Разумеется, приступать к изучению методов решения уравнений и систем уравнений, имеет смысл только в том случае, если решение простейших тригонометрических уравнений не вызывает никаких затруднений.

Решение простых тригонометрических уравнений

1. $\sin x = a$

Если $|a| > 1$ - решений нет.

Если $|a| \leq 1$ - решением является число вида $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Частные случаи:

$$\sin x = 0, x = \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin x = 1, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin x = -1, x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

2. $\cos x = a$.

Если $|a| > 1$ - решений нет.

Если $|a| \leq 1$ - решением является число вида $x = \pm \arccos a + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Частные случаи:

$$\cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x = 1, x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x = -1, x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

3. $\operatorname{tg} x = a$

Решением является число вида $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

4. $\operatorname{ctg} x = a$

Решением является число вида $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Основные методы решения тригонометрических уравнений

1.Решение алгебраическим методом

Ещё этот метод называют методом замены переменной и подстановки. Используя формулы приведения, основные тригонометрические формулы преобразуем, делаем замену, после чего находим корни.

Рассмотрим пример:

$$\cos^2 \frac{x}{3} - 7 \cos \frac{x}{3} + 4 = \sin^2 \frac{x}{3}$$

Решение. Заменим $\sin^2 \frac{x}{3}$ на $1 - \cos^2 \frac{x}{3}$

$$\cos^2 \frac{x}{3} - 7 \cos \frac{x}{3} + 4 = 1 - \cos^2 \frac{x}{3}$$

Обозначая $\cos \frac{x}{3}$ через t , получаем, после упрощений, $2t^2 - 7t + 3 = 0$. Корни этого уравнения: $t_1 = 3$, $t_2 = \frac{1}{2}$, так что $\cos \frac{x}{3} = 3$ или $\cos \frac{x}{3} = \frac{1}{2}$. Первое из этих уравнений не имеет решений, так как $\left| \cos \frac{x}{3} \right| \leq 1$; решая второе, получаем $\frac{x}{3} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ откуда $x = \pm \pi + 6\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\pm \pi + 6\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

2.Разложение уравнения на множители

Сначала переносим все члены влево и раскладываем на множители.

$$\sin 2x + 4 \cos x - \frac{1}{2} \sin x = 1$$

Решение. Заменим $\sin 2x$ по формуле синуса двойного угла и способом группировки разложим на множители:

$$\sin 2x + 4 \cos x - \frac{1}{2} \sin x - 1 = 0,$$

$$2 \cos x (\sin x + 2) - \frac{1}{2} (\sin x + 2) = 0,$$

$$(2 \cos x - \frac{1}{2})(\sin x + 2) = 0.$$

Откуда $2 \cos x - \frac{1}{2} = 0$ или $\sin x + 2 = 0$, то есть $\cos x = \frac{1}{4}$ или $\sin x = -2$. Решениями первого уравнения будут числа $x = \pm \arccos \frac{1}{4} + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$), второе уравнение решений не имеет, так как $|\sin x| \leq 1$.

Ответ: $\pm \arccos \frac{1}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

3.Приведение уравнения к однородному уравнению

Однородными уравнениями называют уравнения, если все члены одной и той же степени, а синус, косинус одного и того же аргумента.

Чтобы его решить, следует: сначала перенести все его члены из правой части в левую часть; вынести все общие множители за скобки; приравнять множители и скобки к нулю; приравненные скобки дают однородное уравнение

меньшей степени, что следует разделить на косинус или синус в старшей степени; решить полученное алгебраическое уравнение относительно $\operatorname{tg} x$.

$a \sin x + b \cos x = 0$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$ – однородное уравнение первой степени.

Разделив обе части на $\cos x$, получим $\frac{a \sin x}{\cos x} + \frac{b \cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$, т.е. $a \operatorname{tg} x + b = 0$.

$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ однородное уравнение второй степени, если коэффициент a отличен от нуля, можно обе части уравнения почленно разделить на $\cos^2 x$ и получим уравнение $a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0$. Это квадратное уравнение относительно новой переменной $t = \operatorname{tg} x$.

Рассмотрим пример. $\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 0$.

Решение. Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$. Чтобы это действие было законным, надо убедиться, что выражение, на которое мы делим, не может обращаться в нуль для тех x , которые являются корнями уравнения. В самом деле, если $\cos^2 x = 0$, то $\cos x = 0$; в нашем уравнении второе и третье слагаемые обратятся в нуль, а потому и первое слагаемое обращается в нуль: $\sin^2 x = 0$. Однако $\cos^2 x$ и $\sin^2 x$ не могут одновременно равняться нулю, так что деление на $\cos^2 x$ законно. Получим: $\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 3 = 0$. Обозначая $\operatorname{tg} x = t$, получаем квадратное уравнение, из которого находим t , а отсюда и x .

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\arctg 3 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Рассуждение, оправдывающее законность деления на $\cos^2 x$, проходит всегда, если только в уравнении присутствует слагаемое с $\sin^2 x$. В противном случае делить на $\cos^2 x$ нельзя, но в этом и нет необходимости, так как можно сразу вынести $\cos^2 x$ за скобку.

Приведем пример. $3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$

Решение. Перепишав уравнение в виде $\cos x (3 \sin x + 2 \cos x) = 0$, получаем, что оно равносильно совокупности уравнений:

$$\begin{cases} \cos x = 0, & (1) \\ 3 \sin x + 2 \cos x = 0 & (2) \end{cases}$$

Решениями уравнения (1) являются $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; для решения уравнения (2) поделим обе части на $\cos x$ (на этот раз это можно, так как если $\cos x = 0$, то из (2) вытекало бы, что $\sin x = 0$, а $\sin x$ и $\cos x$ не могут одновременно равняться нулю) и получим $3 \operatorname{tg} x + 2 = 0$, откуда $x = \arctg(-\frac{2}{3}) + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\arctg(-\frac{2}{3}) + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Уравнение (2), которое мы решили по ходу дела, – тоже однородное уравнение относительно $\sin x$ и $\cos x$, только первой степени.

Наряду с уравнениями, которые сразу записаны в виде однородных относительно синуса и косинуса, существуют и уравнения, которые можно свести к однородным с помощью следующего приема.

Если в каждой из частей тригонометрического уравнения стоит сумма выражений вида $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\sin x \cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$ (возможно, с какими-то коэффициентами) и свободных членов, то это уравнение сведется к

однородному, если всюду заменить $\sin 2x$ на $2\sin x \cos x$, $\cos 2x$ на $\cos^2 x - \sin^2 x$, а каждый свободный член a заменить на $a(\cos^2 x + \sin^2 x)$.

$$\begin{aligned}\sin \alpha \sin \beta &= \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2} \\ \sin \alpha \cos \beta &= \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2} \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}\end{aligned}$$

4.Переход к половинному углу

Применяя формулы двойного угла переходим к половинному углу.

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2\operatorname{ctg} \alpha}$$

Пример. $3 \sin x - 5 \cos x = 7$. Переходим к половинному углу:

$6 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} - 5 \cos^2 \frac{x}{2} + 5 \sin^2 \frac{x}{2} = 7 \sin^2 \frac{x}{2} + 7 \cos^2 \frac{x}{2}$, после чего все члены сводим в одну часть и решаем уравнение.

5.Введение вспомогательного угла

Уравнения вида, где содержится $\sin x \pm \cos x$ и их произведения, решаются введением вспомогательного аргумента.

Поработаем с выражением $A \sin x + B \cos x$:

$$A \sin x + B \cos x = C \left(\frac{A}{C} \sin x + \frac{B}{C} \cos x \right) = C(\cos t \sin x + \sin t \cos x) = C \sin(x+t).$$

Итак, $A \sin x + B \cos x = C \sin(x+t)$, где $C = \sqrt{A^2 + B^2}$. Аргумент t называют вспомогательным аргументом.

Рассмотрим пример. $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$.

Вычислим C , $C = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}$ и получим уравнение $\frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = 0$

Заметим, что $\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$, а $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$, и воспользуемся формулой синуса разности:

$$\sin x \cos \frac{\pi}{3} - \cos x \sin \frac{\pi}{3} = 0, \quad \sin(x - \frac{\pi}{3}) = 0, \quad x - \frac{\pi}{3} = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

6.Метод преобразования произведения в сумму(разность)

Формулы преобразования произведений функций

Пример. $2 \sin x \cdot \sin 3x = \cos 4x$.

Решим ее, преобразовав левую часть в сумму, то есть:

$$\cos 4x - \cos 8x = \cos 4x,$$

$$\cos 8x = 0, \quad 8x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{8}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{8}, \quad k \in \mathbb{Z}$.

7. Метод универсальной подстановки

Решим уравнение $3\sin x - 2\cos x = 2$ с помощью формул универсальной подстановки (выражающих $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg}(x/2)$). Согласно этим формулам,

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}(\frac{x}{2})}{1+\operatorname{tg}^2(\frac{x}{2})} \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2(\frac{x}{2})}{1+\operatorname{tg}^2(\frac{x}{2})} \quad (*)$$

Левые части этих тождеств определены при всех x , а правые - при всех x , кроме тех, для которых $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Поэтому эти значения x надо проверить подстановкой в исходное уравнение. Подставляя в исходное уравнение убеждаемся, что эти x являются корнями. Теперь обозначим $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ и заменим в уравнении $\sin x$ и $\cos x$ по формулам (*). Получим:

$$\frac{6t}{1+t^2} - 2 \frac{1-t^2}{1+t^2} = 2$$

Решая это уравнение, находим: $x = 2\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Собирая найденные значения x , получаем $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $2\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $2\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

До сих пор мы избегали уравнений, в которых участвуют тангенс или котангенс или же что-то стоит в знаменателе, теперь дошла очередь и до них. Основной новый момент - необходимость следить за областью определения.

Напомним, что выражение $\operatorname{tg} x$ имеет смысл тогда и только тогда, когда $x \neq \pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Аналогично, выражение $\operatorname{ctg} x$ имеет смысл тогда и только тогда, когда $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Лучше всего в самом начале решения уравнения выписать все необходимые ограничения; если какое-то выражение стоит в знаменателе, надо записать, что оно не равно 0, причем не обязательно сразу же расшифровывать это ограничение, выясняя, чему именно не может равняться x : ведь для этого может потребоваться решить еще одно уравнение! В конце решения надо проверить найденные значения неизвестных на вхождение в область определения. Часто это бывает совсем просто.

8. Решение уравнений понижением их степени

Формулы понижения степени

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^3 \alpha = \frac{3\sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$$

$$\cos^3 \alpha = \frac{3\cos \alpha + \cos 3\alpha}{4}$$

Рассмотрим пример. $\sin x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$.

Умножим обе части уравнения на 2 и применим формулы понижения степени $2\sin x + 1 - \cos 4x = 1 - \cos 6x$, $2\sin x + (\cos 6x - \cos 4x) = 0$.

Применим формулу преобразования суммы тригонометрических формул и разложим на множители:

$$2\sin x - 2\sin 5x \sin x = 0, \quad 2\sin x(1 - \sin 5x) = 0,$$

$$\sin x = 0 \quad \text{или} \quad 1 - \sin 5x = 0,$$

$$x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим решение систем уравнений

1. Решите систему:

$$\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x, \\ \cos x < -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое уравнение, применим формулы половинного аргумента.

$$\sin^2 x + \frac{1 - \cos 4x}{2} - \frac{1 - \cos 6x}{2} = 0, \quad 2\sin^2 x + \cos 6x - \cos 4x = 0.$$

Применим формулу преобразования разности косинусов в произведение.

$$2\sin^2 x - 2\sin x \sin 5x = 0, \quad 2\sin x (\sin x - \sin 5x) = 0,$$

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin x - \sin 5x = 0. \end{cases}$$

$$\sin x = 0; x = \pi n; n \in \mathbb{Z}; \text{ учитывая то, что } \cos x < -\frac{1}{2}, x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x - \sin 5x = 0.$$

Применим условия равенства

$$\begin{cases} x - 5x = 2\pi n, \\ x + 5x = \pi + 2\pi k; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2}n, \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k. \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Учитывая то, что } \cos x < -\frac{1}{2}, x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k = \frac{\pi(12k \pm 5)}{6}.$$

$$\text{Ответ: } \pi + 2\pi n; \frac{\pi(12k \pm 5)}{6}, n, k \in \mathbb{Z}.$$

2. Решите систему:

$$\begin{cases} \cos^3 x - \sin^3 x = \cos 2x, \\ 0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

Решение.

$$\cos^3 x - \sin^3 x = \cos 2x$$

Левую часть разложим на множители как разность кубов.

$$(\cos x - \sin x)(1 + \cos x \sin x) = (\cos^2 x - \sin^2 x),$$

$$\cos x - \sin x)(1 + \cos x \sin x) - (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0,$$

$$(\cos x - \sin x)(1 + \cos x \sin x - \cos x - \sin x) = 0.$$

$$(\cos x - \sin x)(\cos x (\sin x - 1) - (\sin x - 1)) = 0,$$

$$(\cos x - \sin x)(\sin x - 1)(\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \cos x - \sin x = 0, \\ \sin x - 1 = 0, \\ \cos x - 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 - \operatorname{tg} x = 0, \\ \sin x = 1, \\ \cos x = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ x = 2\pi m. \end{cases} \quad n, k, m \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Учитывая то, что } 0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}, x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}.$$

$$\text{Ответ: } 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}.$$

3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4}, \\ \cos x \cos y = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Решение. Складывая и вычитая почленно уравнения системы, получаем соответственно

$$\begin{cases} \cos x \cos y - \sin x \sin y = \frac{1}{2}, \\ \cos x \cos y + \sin x \sin y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos(x+y) = \frac{1}{2}, \\ \cos(x-y) = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x-y = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Решая со знаком «+», получим: $x = \frac{\pi(6n+6m+1)}{6}$, $y = \frac{\pi(6n-6m+1)}{6}$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

Решая со знаком «-», получим: $x = \frac{\pi(6n+6m-1)}{6}$, $y = \frac{\pi(6n-6m-1)}{6}$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $(\pi \frac{(6n+6m+1)}{6}; \pi \frac{(6n-6m+1)}{6})$; $(\pi \frac{(6n+6m-1)}{6}; \pi \frac{(6n-6m-1)}{6})$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

4. Решите систему:

$$\begin{cases} \sin(x - \frac{\pi}{4}) - \cos(x + \frac{3\pi}{4}) = 1, \\ \frac{2\cos 7x}{\cos 3 + \sin 3} > 2^{\cos 2x}. \end{cases}$$

Решение. Т.к. $2^{\cos 2x} > 0$, $-1 \leq \cos 2x \leq 1$, $\frac{1}{2} \leq 2^{\cos 2x} \leq 2$;

$\cos 3 \approx -0,9$; $\sin 3 \approx 0,1$

$\cos 3 + \sin 3 < 0 \rightarrow \cos 7x < 0 \rightarrow \frac{3\pi}{14} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{14} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Решаем уравнение

$$\sin(x - \frac{\pi}{4}) - \cos(x + \frac{3\pi}{4}) = 1,$$

$$\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4} - \cos x \cos \frac{3\pi}{4} + \sin x \sin \frac{3\pi}{4} = 1,$$

$$\sqrt{2} \sin x = 1, \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}, x = (-1)^n * \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, x = \pi \frac{8n+3}{4}, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pi \frac{8n+3}{4}, n \in \mathbb{Z}$.

5. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \cos(x-y) = \frac{1}{2}, \\ \cos(x+y) = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения системы следует, что $x-y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, а из второго $x+y = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Для знака «+» получим

$$\begin{cases} x-y = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ \begin{cases} x+y = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \\ x+y = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \end{cases} \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi n + \pi k, \\ y = \frac{\pi}{6} + \pi k - \pi n, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + \pi n + \pi k, \\ y = -\frac{\pi}{2} + \pi k - \pi n; \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x = \pi \frac{1+2n+2k}{2}, \\ y = \pi \frac{1+6k-6n}{6} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x = \pi \frac{6n+6k-1}{6}, \\ y = \pi \frac{2k-2n-1}{2}; \end{array} \right. \end{array} \right. n, k \in \mathbb{Z}.$$

Для знака «-» получим

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ x + y = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \\ x + y = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \pi n + \pi k, \\ y = \frac{\pi}{2} + \pi k - \pi n \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + \pi n + \pi k, \\ y = -\frac{\pi}{6} + \pi k - \pi n; \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x = \pi \frac{6n+6k+1}{6}, \\ y = \pi \frac{2k-2n+1}{2} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x = \pi \frac{2n+2k-1}{2}, \\ y = \pi \frac{6k-6n-1}{6}. \end{array} \right. \end{array} \right. n, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $(\pi \frac{1+2n+2k}{2}; \pi \frac{1+6k-6n}{6}); (\pi \frac{6n+6k-1}{6}; \pi \frac{2k-2n-1}{2});$
 $(\pi \frac{6n+6k+1}{6}; \pi \frac{2k-2n+1}{2}); (\pi \frac{2n+2k-1}{2}; \pi \frac{6k-6n-1}{6}), n, k \in \mathbb{Z}.$

6. Решите систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} x+y = \frac{2\pi}{3}, \\ \frac{\sin x}{\sin y} = 2. \end{array} \right.$$

Решение. Ко второму уравнению применим производную пропорцию

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}; \quad \frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{2+1}{2-1}, \quad \frac{2\sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}}{2\cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}} = 3,$$

$$\operatorname{tg} \frac{x+y}{2} \operatorname{ctg} \frac{x-y}{2} = 3, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \operatorname{ctg} \frac{x-y}{2} = 3,$$

$$\operatorname{ctg} \frac{x-y}{2} = \sqrt{3}, \quad x - y = \frac{\pi}{3} + 2\pi k;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = \frac{2}{3}\pi, \\ x - y = \frac{\pi}{3} + 2\pi n; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \\ y = \frac{\pi}{6} - k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

Ответ: $(\frac{\pi(1+2k)}{2}; \frac{\pi(1-6k)}{6}), k \in \mathbb{Z}.$

7. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = \frac{3\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 2; \end{cases}$$

Решение.
$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} - y, \\ \operatorname{tg}(\frac{3\pi}{4} - y) - \operatorname{tg} y = 2. \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{4} - y) - \operatorname{tg} y = 2, \quad \frac{\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} \operatorname{tg} y} - \operatorname{tg} y = 2, \quad \frac{-1 - \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} y} - \operatorname{tg} y = 2, \quad \frac{1 + \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} y - 1} - \operatorname{tg} y = 2.$$

Пусть $\operatorname{tg} y = t$.

$$\frac{1+t}{t-1} - t + 2 = 0, \quad 1 + t - t^2 - t + 2 = 0; \quad t - 1 \neq 0;$$

$$-t^2 = -3, \quad t^2 = 3, \quad t = \pm\sqrt{3},$$

$$1. \operatorname{tg} y = \sqrt{3}, \quad y = \frac{\pi}{3} + \pi n,$$

$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} - \pi n, \\ y = \frac{\pi}{3} + \pi n; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pi(\frac{5-12n}{12}), \\ y = \pi\frac{3n+1}{3}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$2. \operatorname{tg} y = -\sqrt{3}, \quad y = \frac{2\pi}{3} + \pi k,$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi(1-12k)}{12}, \\ y = \frac{\pi(3k+2)}{2}, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $(\pi \frac{5-12n}{12}; \pi \frac{3n+1}{3}); (\pi \frac{1-12n}{12}; \pi \frac{3n+2}{3}), n, k \in \mathbb{Z}.$

8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}, \\ 0 < x < \pi, \\ 0 < y < \pi. \end{cases}$$

При $0 < x < \pi$, $\sin x > 0$; при $0 < y < \pi$, $-1 < \cos y < 1$.

Из первого уравнения системы $\sin x = -\cos y$. Подставив во второе уравнение,

получим $\cos^2 y + \cos^2 y = \frac{1}{2}$, $\cos^2 y = \frac{1}{4}$, $\cos y = \pm \frac{1}{2}$.

Если $\cos y = \frac{1}{2}$, то $\sin x = -\frac{1}{2}$. Следовательно, не дает решения.

Если $\cos y = -\frac{1}{2}$, то $\sin x = \frac{1}{2}$.

$$\begin{cases} y = \frac{2\pi}{3}, \\ \begin{cases} x = \frac{\pi}{6}, \\ x = \frac{5\pi}{6}. \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: $(\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}); (\frac{5\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}).$