

МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА ЗАНЯТИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ»
НА ТЕМУ: «МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ
ИНТЕГРАЛОВ»

Тема занятия: Методы вычисления неопределенных интегралов

Цели занятия:

Образовательная: Сформировать представления об интегральном исчислении. Выработать навыки нахождения неопределенного интеграла и умения пользоваться свойствами и методами интегрирования.

Развивающая: Развивать математически грамотную речь, внимание, сознательное восприятие учебного материала.

Воспитательная: Воспитывать познавательную активность, сообразительность и мышление, благодарность к достижению великих математиков в области интегрирования.

Вид занятия: урок

Тип занятия: сообщения новых знаний

Метод проведения: словесный, наглядный, практическая работа.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной от функции $f(x)$ на отрезке от $[a, b]$, если во всех точках этого отрезка выполняется равенство:

$$F'(x) = f(x).$$

Определение. Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то выражение $F(x)+C$ называется неопределённым интегралом от функции

$f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Таким образом, по определению $\int f(x)dx = F(x) + C$, если $F'(x) = f(x)$; $f(x)$ – называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением. Процесс нахождения первообразной от данной функции $f(x)$ называется интегрированием.

Основные свойства неопределённого интеграла.

1. Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции, т.е. если $F'(x) = f(x)$, то $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$.

2. Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух или нескольких функций равен сумме их интегралов:

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

5. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, если C – постоянная, то $\int C \cdot f(x)dx = C \int f(x)dx$.

Таблица интегралов

$$1. \int u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1; \quad \int 1 \cdot du = u + C \quad \int 0 \cdot du = C$$

$$2. \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$3. \int \sin u du = -\cos u + C$$

$$4. \int \cos u du = \sin u + C$$

$$5. \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$$

$$6. \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$$

$$7. \int \operatorname{tg} u du = -\ln|\cos u| + C$$

$$8. \int \operatorname{ctg} u du = \ln |\sin u| + C.$$

$$9. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad \int e^u du = e^u + C.$$

$$10. \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C.$$

$$11. \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C.$$

$$12. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C.$$

$$13. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C.$$

Основные методы интегрирования

НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Метод непосредственного интегрирования связан с приведением подынтегрального выражения к табличному виду путем элементарных преобразований и применения свойств неопределенного интеграла.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{x} + 2x^2 - 5x^3 + 7}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

Решение.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x} + 2x^2 - 5x^3 + 7}{\sqrt[3]{x^2}} dx &= \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx + \int \frac{2x^2}{\sqrt[3]{x^2}} dx - \int \frac{5x^3}{\sqrt[3]{x^2}} dx + \int \frac{7}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \\ &= \int x^{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}} dx + 2 \int x^{2 - \frac{2}{3}} dx - 5 \int x^{3 - \frac{2}{3}} dx + 7 \int x^{-\frac{2}{3}} dx = \\ &= \int x^{-\frac{1}{6}} dx + 2 \int x^{\frac{4}{3}} dx - 5 \int x^{\frac{7}{3}} dx + 7 \int x^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{5}{6}}}{\frac{5}{6}} + 2 \frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} - 5 \frac{x^{\frac{10}{3}}}{\frac{10}{3}} + 7 \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = \\ &= \frac{6\sqrt[6]{x^5}}{5} + \frac{6\sqrt[3]{x^7}}{7} - \frac{3\sqrt[3]{x^{10}}}{2} + \frac{21\sqrt[3]{x}}{5} + C \end{aligned}$$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{7x^2 + 9}$

Решение. Данный интеграл приведем к табличному интегралу, для чего коэффициент при x^2 вынесем за знак интеграла:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{7x^2 + 9} &= \frac{1}{7} \int \frac{dx}{x^2 + (9/7)} = \frac{1}{7} \int \frac{dx}{x^2 + (3/\sqrt{7})^2} = \frac{1}{7} \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}x}{3} + C = \\ &= \frac{1}{3\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}x}{3} + C\end{aligned}$$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{x^4 dx}{x^2 + 1}$

Решение. Так как подынтегральная функция представляет собой неправильную дробь, то выделим из неё целую часть, для этого используем правило деления многочлена на многочлен.

$$\int \frac{x^4 dx}{x^2 + 1} = \int x^2 - 1 + \frac{1}{x^2 + 1} dx = \int x^2 - 1 dx + \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x + C$$

ВВЕДЕНИЕ ПЕРЕМЕННОЙ ПОД ЗНАК ДИФФЕРЕНЦИАЛА

В основе метода введения переменной под знак дифференциала лежит одно из основных свойств неопределенного интеграла.

Пусть требуется вычислить $\int f(x) dx$. Предположим, что существует дифференцируемая функция $u = \varphi(x)$ и функция $g(u)$ такие, что подынтегральное выражение $f(x) dx$ может быть записано в виде:

$$f(x) dx = g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = g(u) du.$$

При этом выполняется соотношение:

$$\int f(x) dx = \int g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int g(u) du, \text{ где } u = \varphi(x).$$

Поэтому вычисление $\int f(x) dx$ сводится к вычислению $\int g(u) du$, который может быть проще исходного.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx$.

Решение. Здесь под знак дифференциала надо положить $\arctg x$, т.к.

$$d(\arctg x) = \frac{1}{1+x^2} dx. \text{ Тогда}$$

$$\int \frac{\arctg x}{1+x^2} dx = \int \arctg x (d\arctg x) = \frac{\arctg^2 x}{2} + C.$$

Пример. Найти интеграл $\int e^{-x^2} x dx$.

Решение. Для того чтобы вычислить этот интеграл, заметим, что

$$d(-x^2) = -2x dx \text{ или } x dx = -\frac{1}{2} d(-x^2). \text{ Поэтому}$$

$$\int e^{-x^2} x dx = -\frac{1}{2} \int e^{-x^2} d(-x^2) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{(x + \sqrt{x^2 - 1})^2}$.

Решение. Умножим числитель и знаменатель на $(x - \sqrt{x^2 - 1})^2$ и, учитывая, что $(x + \sqrt{x^2 - 1})^2 \cdot (x - \sqrt{x^2 - 1})^2 = [(x + \sqrt{x^2 - 1}) \cdot (x - \sqrt{x^2 - 1})]^2 = [x^2 - (x^2 - 1)]^2 = 1$, получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x + \sqrt{x^2 - 1})^2} &= \int (x - \sqrt{x^2 - 1})^2 dx = \int x^2 - 2x\sqrt{x^2 - 1} + x^2 - 1 dx = \\ &= 2 \int x^2 dx - 2 \int x\sqrt{x^2 - 1} dx - \int dx = \frac{2}{3} x^3 - x - \int (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} d(x^2 - 1) = \\ &= \frac{2}{3} x^3 - x - \frac{2}{3} (x^2 - 1)^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

МЕТОД ПОДСТАНОВКИ (ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ В НЕОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ)

Пусть требуется найти интеграл $\int f(x) dx$, который не является табличным. В подынтегральном выражении, в этом случае, нужно произвести

замену переменной $x = \varphi(t)$, чтобы интеграл стал табличным или сводился к ним проще, чем первоначальный. Функция $\varphi(t)$ должна быть непрерывной, иметь непрерывную производную и обратную функцию. Т.к. $dx = \varphi'(t)dt$, то $\int f(x)dx = \int \varphi(t) \cdot \varphi'(t)dt$.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$.

Решение. Чтобы избавиться от корней, надо сделать замену $x = t^S$, где S – наименьшее общее кратное степени корней, т.е. $x = t^6$. Тогда $dx = (t^6)' \cdot dt = 6t^5 dt$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} &= \int \frac{6t^5 dt}{t^3 - t^2} = 6 \int \frac{t^3 dt}{t-1} = 6 \int t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1} dt = \\ &= 2t^3 + 3t^2 + 6t + 6 \ln|t-1| + C = \\ &= 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6 \ln|\sqrt[6]{x} - 1| + C. \end{aligned}$$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{10+x^2}}{x} dx$.

Решение. Положим $10 + x^2 = t^2$, дифференцируя равенство, получим $2xdx = 2tdt$ или $xdx = tdt$. Тогда имеем: $\frac{dx}{x} = \frac{xdx}{x^2} = \frac{tdt}{t^2 - 10}$ и

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{10+x^2}}{x} dx &= \int t \cdot \frac{tdt}{t^2 - 10} = \int \frac{t^2 - 10 + 10}{t^2 - 10} dt = \int dt + 10 \int \frac{dt}{t^2 - 10} = \\ &= t + \frac{10}{2\sqrt{10}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{10}}{t + \sqrt{10}} \right| + C = \sqrt{10+x^2} + \frac{\sqrt{10}}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{10+x^2} - \sqrt{10}}{\sqrt{10+x^2} + \sqrt{10}} \right| + C. \end{aligned}$$

Замечание. Если подынтегральная функция содержит радикалы $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$, то часто удобны следующие подстановки.

1. Для случая $\sqrt{a^2 - x^2}$:

$$x = a \cdot \sin t, \text{ тогда } \sqrt{a^2 - x^2} = a \cdot \cos t, dx = a \cdot \cos t \cdot dt, t = \arcsin \frac{x}{a}.$$

2. Для случая $\sqrt{a^2 + x^2}$:

$$x = a \cdot \operatorname{tg} t, \text{ тогда } \sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2(1 + \operatorname{tg}^2 t)} = \frac{a}{\cos t}, \quad dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt, \quad t = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$$

3. Для случая $\sqrt{x^2 - a^2}$:

$$x = \frac{a}{\cos t}, \text{ тогда } \sqrt{x^2 - a^2} = a \cdot \operatorname{tg} t, \quad dx = \frac{a \cdot \sin t}{\cos^2 t} dt, \quad t = \arccos \frac{a}{x}.$$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{(9 - x^2)^3}}$.

Решение. Положим $x = 3 \sin t$, тогда $dx = 3 \cos t dt$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(9 - x^2)^3}} = \int \frac{3 \cos t dt}{\sqrt{(9 - 9 \sin^2 t)^3}} = \int \frac{3 \cos t}{\sqrt{3^6 \cos^6 t}} dt = \frac{1}{9} \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{\operatorname{tg} t}{9} + C.$$

Так как $\sin t = \frac{x}{3}$, $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{3}$, $\operatorname{tg} t = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$, то

окончательно имеем: $\int \frac{dx}{\sqrt{(9 - x^2)^3}} = \frac{x}{9\sqrt{9 - x^2}} + C.$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}}$.

Решение. Заменяем: $x = \frac{2}{\cos t}$. Тогда $dx = \frac{2 \sin t}{\cos^2 t} dt$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}} = \int \frac{2 \sin t}{\frac{4}{\cos^2 t} \cdot \sqrt{\frac{4}{\cos^2 t} - 4}} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{4} \int \cos t dt = \frac{1}{4} \sin t + C.$$

Так как $\cot = \frac{2}{x}$, $\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x}$, то

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}} = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{4x} + C.$$