

ДЕПАРТАМЕНТ ЛЕСНОГО ХОЗЯЙСТВА НИЖЕГОРОДСКОЙ ОБЛАСТИ
Государственное бюджетное профессиональное
образовательное учреждение Нижегородской области
«КРАСНОБАКОВСКИЙ ЛЕСНОЙ КОЛЛЕДЖ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению практических работ
по дисциплине ОУД.03 «Математика»
для студентов 1 курса специальности
Специальность: 23.02.07 «Техническое обслуживание и ремонт
двигателей, систем и агрегатов автомобилей»

РАССМОТРЕНО

на заседании предметно-цикловой комиссии
общеобразовательных дисциплин
протокол №__от « »_____2019г.

Председатель

_____Т.В. Пospelова

СОСТАВИЛА

Преподаватель
Г.А. Чудокvasова

р.п. Красные Баки
2019г

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1. Требования к знаниям и умениям при выполнении практических работ	4
2. Правила выполнения практических работ	6
Практическая работа №1. Арифметические операции над действительными числами. Приближенные вычисления.	7
Практическая работа № 2. Арифметические операции над комплексными числами.	10
Практическая работа № 3-4. Преобразование иррациональных выражений. Нахождение области допустимых значений выражений, содержащих радикалы.	15
Практическая работа № 5. Преобразование выражений, содержащих степени.	20
Практическая работа № 6-7. Преобразование логарифмических выражений.	21
Практическая работа № 8. Преобразование алгебраических выражений.	25
Практическая работа №9. Взаимное расположение плоскостей.	30
Практическая работа №10. Прямая перпендикулярная плоскости. Перпендикуляр и наклонная. Теорема о трех перпендикулярах.	33
Практическая работа № 11. Решение задач по теме: «Перпендикулярность прямых».	38
Практическая работа №12. Решение задач по теме: «Перпендикулярность плоскостей».	39
Практическая работа № 13. Действия над векторами. Нахождение угла между векторами.	40
Практическая работа № 14. Использование векторов при решении математических и практических задач.	43
Практическая работа № 15. Действия над векторами. Использование координат при решении математических и прикладных задач.	43
Практическая работа № 16. Составление уравнений сферы, плоскости, прямой.	47
Практическая работа № 17. Преобразование тригонометрических выражений.	50
Практическая работа № 18. Преобразование тригонометрических выражений с использованием формул сложения.	52
Практическая работа № 19. Преобразование тригонометрических выражений с использованием формул приведения.	52
Практическая работа № 20. Преобразование тригонометрических выражений с использованием формул двойного и половинного аргумента.	52
Практическая работа № 21. Преобразование выражений, содержащих обратные тригонометрические функции.	57
Практическая работа № 22. Решение тригонометрических уравнений.	61
Практическая работа № 23. Решение тригонометрических неравенств.	64
Практическая работа № 24. Построение графика обратной функции. Выполнение арифметических операций над функциями. Сложная функция (композиция).	65
Практическая работа № 25. Построение графиков функций, их преобразование. Взаимнообратные функции. Исследование функций.	65
Практическая работа № 26. Преобразование графиков. Нахождение области определения и области значений.	68
Практическая работа № 27. Построение графиков взаимнообратных функций. Исследование функций.	70
Практическая работа № 28. Решение задач на перебор вариантов, на подсчет числа размещений, перестановок, сочетаний.	72
Практическая работа № 29. Бином Ньютона.	75
Практическая работа № 30. Дискретная случайная величина, закон ее распределения, числовые характеристики. Закон больших чисел.	77
Практическая работа № 31. Задачи математической статистики. Задачи с применением вероятностных методов.	85
Практическая работа № 32. Нахождение элементов параллелепипеда и призмы.	88
Практическая работа № 33. Нахождение элементов пирамиды.	93

Практическая работа № 34. Построение сечений. Поверхность многогранников.	97
Практическая работа № 35. Нахождение элементов цилиндра, конуса, шара. Построение сечений.	101
Практическая работа № 36. Вписанные и описанные тела вращения.	104
Практическая работа № 37. Вычисление пределов последовательностей.	106
Практическая работа № 38. Предел функции в точке и на бесконечности. Правила дифференцирования.	112
Практическая работа № 39. Производная сложной функции. Физический и геометрический смысл производной.	115
Практическая работа № 40. Исследование функций и построение графиков.	122
Практическая работа № 41. Задачи на отыскание наибольших и наименьших величин.	126
Практическая работа № 42. Нахождение первообразной функции. Вычисление неопределенного интеграла.	128
Практическая работа № 43. Вычисление определенного интеграла. Площадь криволинейной трапеции.	128
Практическая работа № 44. Вычисление объема многогранников.	131
Практическая работа № 45. Вычисление объема тел вращения.	131
Практическая работа № 46. Нахождение площади поверхности цилиндра, конуса, сферы.	133
Практическая работа № 47. Решение рациональных, иррациональных, показательных уравнений.	135
Практическая работа № 48-49. Решение логарифмических, тригонометрических уравнений.	141
Практическая работа № 50. Решение неравенств методом интервалов.	147
Практическая работа № 51. Решение систем уравнений и неравенств.	147
Литература	151

Введение

В соответствии с ФГОС дисциплина ОУД.03 «Математика» по специальности 23.02.07 «Техническое обслуживание и ремонт двигателей, систем и агрегатов автомобилей» входит в общеобразовательный цикл, формирует базовые знания для освоения общепрофессиональных и специальных дисциплин.

Целью данных методических рекомендаций является организация преподавателем эффективной работы студентов на практических занятиях по дисциплине ОУД.03 «Математика» как средства, способствующего повышению качества образовательного процесса.

Задачи:

- 1) сформировать общие и профессиональные компетенции во время проведения практических работ через содержание представленных методических рекомендаций;
- 2) помочь преподавателю в подборе материала предлагаемого студентам для выполнения практических работ с целью закрепления и углубления знаний;
- 3) рационально организовать самостоятельную работу студентов по выполнению практических работ через распределение времени, затраченного на ее выполнение, предложенную форму контроля их знаний, критерии оценок.

Практическая работа является одним из видов учебных занятий студентов, выполняемых под руководством преподавателя.

Основные цели практических работ:

- систематизация и закрепление знаний и практических умений студентов полученных при изучении на уроке;
- углубление и расширение теоретических знаний, формирование умений использовать справочную документацию, дополнительную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов, творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельного мышления;
- развитие исследовательских умений.

1. Требования к знаниям и умениям при выполнении практических работ

В результате работ, предусмотренных программой по данной специальности, студент должен

знать:

- значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике; широту и в то же время ограниченность применения математических методов к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе;
- значение практики и вопросов, возникающих в самой математике для формирования и развития математической науки; историю развития понятия числа, создания математического анализа, возникновения и развития геометрии;
- универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость во всех областях человеческой деятельности;
- вероятностный характер различных процессов окружающего мира.

уметь:

- выполнять арифметические действия над числами, сочетая устные и письменные приемы; находить приближенные значения величин и погрешности вычислений (абсолютная и относительная); сравнивать числовые выражения;
- находить значения корня, степени, логарифма, тригонометрических выражений на основе определения, используя при необходимости инструментальные средства; пользоваться приближенной оценкой при практических расчетах;
- выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами степеней, логарифмов, тригонометрических функций;
- вычислять значение функции по заданному значению аргумента при различных способах задания функции;
- определять основные свойства числовых функций, иллюстрировать их на графиках;

- строить графики изученных функций, иллюстрировать по графику свойства элементарных функций;
- использовать понятие функции для описания и анализа зависимостей величин;
- находить производные элементарных функций;
- использовать производную для изучения свойств функций и построения графиков;
- применять производную для проведения приближенных вычислений, решать задачи прикладного характера на нахождение наибольшего и наименьшего значения;
- вычислять в простейших случаях площади и объемы с использованием определенного интеграла;
- решать рациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения, сводящиеся к линейным и квадратным, а также аналогичные неравенства и системы;
- использовать графический метод решения уравнений и неравенств;
- изображать на координатной плоскости решения уравнений, неравенств и систем с двумя неизвестными;
- составлять и решать уравнения и неравенства, связывающие неизвестные величины в текстовых (в том числе прикладных) задачах;
- решать простейшие комбинаторные задачи методом перебора, а также с использованием известных формул;
- вычислять в простейших случаях вероятности событий на основе подсчета числа исходов;
- распознавать на чертежах и моделях пространственные формы; соотносить трехмерные объекты с их описаниями, изображениями;
- описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, аргументировать свои суждения об этом расположении;
- анализировать в простейших случаях взаимное расположение объектов в пространстве;
- изображать основные многогранники и круглые тела; выполнять чертежи по условиям задач;
- строить простейшие сечения куба, призмы, пирамиды;
- решать планиметрические и простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов);
- использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы;
- проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач.
- использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни:
 - для практических расчетов по формулам, включая формулы, содержащие степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции, используя при необходимости справочные материалы и простейшие вычислительные устройства;
 - для описания с помощью функций различных зависимостей, представления их графически, интерпретации графиков;
 - решения прикладных задач, в том числе социально-экономических и физических, на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение скорости и ускорения;
 - для построения и исследования простейших математических моделей;
 - для анализа реальных числовых данных, представленных в виде диаграмм, графиков;
 - анализа информации статистического характера;
 - для исследования (моделирования) несложных практических ситуаций на основе изученных формул и свойств фигур;
 - вычисления объемов и площадей поверхностей пространственных тел при решении практических задач, используя при необходимости справочники и вычислительные устройства.

Изучение данной учебной дисциплины направлено на формирование следующих общих компетенций (ОК) обучающихся:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и в команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), результат выполнения заданий.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

2. Правила выполнения практических работ.

В начале учебного года (на первом учебном занятии) преподаватель знакомит студентов со структурой построения всего курса дисциплины ОУД.03 «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия», в которую должны быть органично вписаны практические работы. Каждый студент после такого занятия должен понимать, сколько практических работ ему предстоит выполнить в период изучения дисциплины и, каким образом он будет отчитываться перед преподавателем. Можно составить таблицу, по которой студенту легко будет ориентироваться по темам курса, видам практических работ, срокам выполнения, критериям оценивания.

Правила выполнения практических работ

1. Каждый студент после выполнения работы должен представить отчет о проделанной работе с анализом полученных результатов и выводом по работе.
2. Отчет о проделанной работе следует делать в тетради школьного формата в клетку. Содержание отчета указано в описании практической работы.
3. Таблицы и рисунки следует выполнять с помощью чертежных инструментов (линейки, циркуля и т. д.) карандашом с соблюдением ЕСКД.
4. Расчет следует проводить с точностью до двух значащих цифр. Вспомогательные расчеты можно выполнить на отдельных листах, а при необходимости на листах отчета.
5. Если студент не выполнил практическую работу или часть работы, то он может выполнить работу или оставшуюся часть во внеурочное время, согласованное с преподавателем.
6. Критериями оценки результатов практической работы студентов являются:
 - уровень усвоения студентом учебного материала;
 - умение студента использовать теоретические знания при выполнении практических задач;
 - сформированность общеучебных умений;
 - обоснованность и четкость изложения материала;
 - уровень оформления работы.

Зачет по практическим работам студент получает при условии выполнения всех предусмотренной программой работ, после сдачи отчетов по работам при удовлетворительных оценках за опросы и контрольные вопросы во время практических занятий.

На выполнение практических работ в курсе изучения дисциплины отводится 102 часа. Методические рекомендации помогут студентам целенаправленно изучать материал по теме, определять свой уровень знаний и умений при выполнении практической работы.

3. Основная часть:

Практическая работа №1.

Арифметические операции над действительными числами.

Приближенные вычисления.

ЦЕЛИ ЗАНЯТИЯ: Обобщить и систематизировать знания о действительных числах, и уметь работать с ними.

Порядок выполнения работы.

1. Ознакомиться с разделом «Теоретическое обоснование и методические указания по решению задач» (см. Приложение 1)
2. Решить задачи самостоятельно по вариантам (см. Приложение 2)
3. Ответить на вопросы для самоконтроля (см. Приложение 3)
4. Индивидуальное задание
А) подготовить презентацию: «Числовые функции и графики».
Б) составить мини – конспект: «Графики элементарных функций».

Приложение 1

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

1. Правила обращения периодической дроби в обыкновенную.

- а) Чтобы обратить чистую периодическую дробь в обыкновенную, достаточно в числителе её период, а в знаменателе число, выраженное столькими девятками, сколько цифр в периоде.
- б) Чтобы обратить смешанную периодическую дробь в обыкновенную, достаточно из числа, стоящего до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода, и полученную разность записать в числителе, а в знаменателе записать число, выраженное столькими девятками, сколько цифр между запятой и периодом.

Решить задачи:

№1: Выпишите все простые числа от 1 до 40.

№2: Выпишите все составные числа от 41 до 60.

№3: Представьте в виде произведения двух простых чисел следующие натуральные числа:
а) 77; б) 57; в) 161; г) 143.

№4: Найдите наибольший общий делитель следующих чисел:

а) 252,441,108; б) 234,1080,8100; в) 118,284,179.

№5: Среди следующих пар чисел найдите пары взаимно простых:

а) 39 и 259; б) 15 и 22; в) 175 и 35; г) 31 и 199.

№6: Найдите наименьшее общее кратное следующих чисел:

а) 15, 10, 6; б) 252, 441, 1080; в) 234, 1080, 8100.

№7: Какие числа делятся на: а) 3; б) 9; в) 5; г) 4; д) 25?

№8: Какие из данных чисел делятся на 2, 3, 4, 9, 10, 25:

а) 1392; б) 2475; в) 2970; г) 197?

№9: представьте в виде периодической дроби следующие числа:

а) $\frac{2}{3}$; б) $6\frac{4}{9}$; в) $8\frac{8}{9}$; г) $5\frac{3}{7}$.

№10: Запишите в виде обыкновенной дроби следующие периодические десятичные дроби:

а) 0,(4); б) 0,(7); в) 0,(12); г) 0,(41); д) 0,1(3); е) 5,11(25).

2. **Действие над действительными числами.** Над действительными числами выполняются четыре арифметических действия, свойства которых сведены в таблицу.

Формула		Название свойства
для сложения	для умножения	

$A + b = b + a$ $(a+b)+c=a+(b+c)$ $a+0=a$ $a+(-a)=0$ $-(-a) = a$ $a + (-b) = a - b$ $a - (-b) = a + b$	$Ab=ba$ $(ab)c=a(bc)$ $a \cdot 0 = 0 ; a \cdot 1 = a$ $a \cdot a^{-1} = \frac{a}{a} = 1$ $(a \neq 0)$ $(a + b)c = ac + bc$ $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(ab);$ $(-a) \cdot (-b) = ab;$ $a \cdot (-\frac{1}{b}) = a : (-b) = (-a) :$ $b = (-a) \cdot \frac{1}{b} = -\frac{a}{b}$	Переместительность (коммутативность) Сочетательность (ассоциативность) Свойства нуля и единицы Существование <i>противоположного</i> числа (возможность вычитания) и <i>обратного</i> числа (возможность деления) Распределительность (дистрибутивность) Свойства действий с отрицательными числами.
--	---	---

3. Приближенное значение числа.

Пусть a – точное, а x – приближенное значение. Тогда абсолютная погрешность приближенного числа x - выражается формулой:

$$\Delta_a x = |a - x|$$

а относительная погрешность приближенного числа x – формулой:

$$\omega_a x = \frac{\Delta_a x}{|x|}, x \neq 0.$$

Приближение $a \approx x$ часто записывают так: $a = x \pm \Delta_a x$. Относительную погрешность обычно выражают в процентах.

Цифра десятичного разряда числа x приближения $a = x \pm \Delta_a x$ называется *верной*, если в том же десятичном разряде чисел $x + \Delta_a x$ и $x - \Delta_a x$ стоит та же цифра. В противном случае она называется *сомнительной*.

Пример 1. Точное значение измеряемой величины равно **2,500**, а приблизительное равно **2,471**. Найти: 1) абсолютную погрешность; 2) относительную погрешность; 3) верные цифры приближенного значения 2,471.

Решение. 1) Здесь $a=2500$, $x=2,471$; тогда АО формуле (1) находим $\Delta_a x = |2,500-2,471| = 0,029$.

2) По формуле (2) получим $\omega_a x = 0,029:2,471 \approx 0,0117 = 1,17\%$.

3) Для определения верных цифр приближенного значения **2,471** вычислим $x + \Delta_a x = 2,471 + 0,029 = 2,500$ и $x - \Delta_a x = 2,471 - 0,029 = 2,447$. Сравнивая полученные величины, устанавливаем, что цифра 2 – верная, а цифры 4, 7 и 1 – сомнительные.

№11 : Найдите абсолютную погрешность, и в приближенном значении x определите верные и сомнительные цифры: а) $a=3,813$, $x=3,841$; б) $a=12,71$, $x=12,68$; в) $a=108,513$, $x=109,623$; г) $a=5,3$, $x=4,7$; д) $a=7,41$, $x=7,54$; е) $a=2103$, $x=20,97$.

№12 : Найдите относительную погрешность и выразите ее в процентах. В приближенном значении x определите верные и сомнительные цифры: а) $a=19,83$, $x=19,76$; б) $a=109,142$, $x=109,128$; в) $a=7,013$, $x=7,028$; г) $a=32,301$, $x=32,287$; д) $a=13,25$, $x=13,42$; е) $a=1045,6$, $x=1027,9$.

№13: Найдите верные и сомнительные цифры в записи приближений: а) $21,327 \pm 0,032$; б) $13,1014 \pm 0,013$; в) $0,2013 \pm 0,0012$; г) $1103,12 \pm 0,09$; д) $13,1276 \pm 0,0005$; е) $112,031 \pm 0,12$; ж) $313,54 \pm 0,07$; з) $21,312 \pm 0,052$; и) $27,032 \pm 0,14$.

4. Действия с приближенными величинами.

1. **Вычисления при строгом учете погрешностей.** Пусть $a \approx x$ и $b \approx y$ – приближенные величины, $\omega_a x$ и $\omega_b y$ – их относительные погрешности; тогда при строгом учете погрешностей погрешности вычислений определяются по следующим формулам:

$$\Delta_{a+b}(x+y) = \Delta_a x + \Delta_b y;$$

$$\Delta_{a-b}(x-y) = \Delta_a x + \Delta_b y;$$

$$\Delta_{ab}(xy) = (\Delta_a x) \cdot |y| + (\Delta_b y) \cdot |x|;$$

$$\Delta_{a/b}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{(\Delta_a x) \cdot |y| + (\Delta_b y) \cdot |x|}{y^2};$$

$$\Delta_a a(x^a) = a|x|^{a-1}(\Delta_a x);$$

$$\omega_{a+b} = \frac{\Delta_{a+b}(x+y)}{|x+y|}; \quad (x+y \neq 0)$$

$$\omega_{a-b} = \frac{\Delta_{a-b}(x-y)}{|x-y|}; \quad (x-y \neq 0)$$

$$\omega_{ab}(xy) = \omega_a x + \omega_b y; \quad (xy \neq 0)$$

$$\omega_{a/b}\left(\frac{x}{y}\right) = \omega_a x + \omega_b y; \quad \left(\frac{x}{y} \neq 0\right)$$

$$\omega_a a(x^a) = a\omega_a x, \quad a > 0 \text{ и } a < 0.$$

Пример 1. Пусть $a=5,0 \pm 0,1$, $b=3,4 \pm 0,2$. Вычислить $a+b$, $a-b$, ab , a/b . Оценить относительные погрешности результатов для ab и a/b .

Решение. Здесь $a=5,0$, $y=3,4$, $\Delta_a x = \Delta_a = 0,1$, $\Delta_b y = \Delta_b = 0,2$. Тогда $\Delta_{a+b} = \Delta_a + \Delta_b = 0,1 + 0,2 = 0,3$, откуда $a+b=8,4 \pm 0,3$ и $a-b=1,6 \pm 0,3$.

Найдем относительные погрешности:

$$\omega_{a+b} = \frac{\Delta_{a+b}}{|x+y|} = \frac{0,3}{8,4} \approx 0,036 = 3,6\%$$

$$\omega_{a-b} = \frac{\Delta_{a-b}}{|x-y|} = \frac{0,3}{1,6} \approx 0,186 = 18,6\%$$

$$\Delta_{ab} = y\Delta_a + x\Delta_b = 3,4 \cdot 0,1 + 5,0 \cdot 0,2 \approx 1,34.$$

$$\Delta_{a/b} = \frac{|y|\Delta_a + |x|\Delta_b}{y^2} = \frac{3,4 \cdot 0,1 + 5,0 \cdot 0,2}{3,4^2} \approx 0,116$$

Следовательно, $ab=17,0 \pm 1,34$, $a/b=1,47 \pm 0,116$.

Оценим относительные погрешности полученных результатов для ab и a/b :

$$\omega_{ab} = \omega_a + \omega_b = \frac{\Delta_a}{|x|} + \frac{\Delta_b}{|y|} = \frac{0,1}{5,0} + \frac{0,2}{3,4} = 0,06 = 6\%; \quad \omega_{a/b} = \omega_{ab} = 6\%$$

Пример 2. Вычислить $(2,78+13,8)^3 - \frac{3,14 \cdot 8,17 + \sqrt{6,82}}{9,183-2,15}$.

Решение. Последовательно находим:

$$1) \quad 2,78+13,8 \approx 2,8+13,8=16,6; \quad 2) \quad (2,78+13,8)^3 \approx 16,6^3 \approx 4574,3;$$

$$3) \quad 3,14 \cdot 8,17 \approx 25,65; \quad 4) \quad 3,14 \cdot 8,17 + \sqrt{6,82} \approx 25,65 + 2,61 = 28,26;$$

$$5) \quad 9,183-2,15 \approx 9,18-2,15=7,03; \quad 6) \quad 28,26:7,03 \approx 4,02; \quad 7) \quad 4574,3-4,02=4570,28 \approx 4570,3.$$

Пример 3. С какой относительной погрешностью следует измерить размеры комнаты, чтобы относительная погрешность величины площади не превышала 2%?

Решение. Пусть a и b – длина и ширина комнаты. Тогда площадь комнаты $S=ab$. Так как $\omega_s = \omega_a + \omega_b < 2\%$, то следует измерить с относительной погрешностью, не превышающей 1%.

№14: Найдите сумму и разность и оцените относительную погрешность результатов: а) $3,72 \pm 0,03$, $12,53 \pm 0,01$; б) $-2,82 \pm 0,07$, $9,8 \pm 0,3$; в) $4,51 \pm 0,02$, $-1,8 \pm 0,4$; г) $8,785 \pm 0,002$; $0,213 \pm 0,007$.

№15: Найдите произведение и частное и оцените относительную погрешность результатов: а) $3,782 \pm 0,003$; $5,014 \pm 0,002$; б) $25,028 \pm 0,007$; $9,128 \pm 0,003$; в) $0,21 \pm 0,02$; $3,2 \pm 0,3$; г) $-2,17 \pm 0,02$; $31,8 \pm 0,5$.

№16: Возведите в степень и оцените относительную погрешность:

а) $x=13,78 \pm 0,04$, $\alpha=3$; б) $x=4,09 \pm 0,02$, $\alpha=4$; в) $x=5,7 \pm 0,3$, $\alpha=1/2$; г) $x=8,13 \pm 0,02$, $\alpha=1/2$.

№17: Длина и ширина прямоугольной комнаты соответственно равны $(3,87 \pm 0,05)$ м и $(5,14 \pm 0,05)$ м. Найдите площадь комнаты.

№18: Железная заготовка имеет форму прямоугольного параллелепипеда, размеры которого равны $(31,28 \pm 0,01)$ мм, $(14,12 \pm 0,01)$ мм, $(40,63 \pm 0,01)$ мм. Найдите массу заготовки, если плотность железа равна $(7,60 \pm 0,05)$ г/см³.

№19: Площадь большого гидравлического пресса $S_1=(240 \pm 1)$ см², а малого $S_2=(12 \pm 0,2)$ см². Достаточно ли силы (460 ± 5) Н на малом поршне, чтобы получить на большем не менее 8300 Н? (Трение не учитывать).

5. Вопросы для самоконтроля:

- Назвать натуральные числа.
- Нарисовать круги Эйлера.
- Как превратить обыкновенную дробь в десятичную?
- Как превратить чистую периодическую дробь в десятичную?
- Как превратить смешанную периодическую дробь в обыкновенную?
- Чему равна абсолютная погрешность?
- Чему равна относительная погрешность?

ЛИТЕРАТУРА:

- Дадаян А.А. Сборник задач по математике. М., Форум, 2013.
- Башмаков М.И. Математика. Задачник. М., Академия, 2012.
- Дадаян А.А. Математика. М., Форум-ИНФРА-М, 2007.
- Богомолов Н.В. Сборник задач по математике. М., Дрофа, 2012.
- Шипачев В.С. Математика. М., Юрайт, 2016.
- Григорьев С.Г. Математика. М., Академия, 2013.
- Богомолов Н.В. Математика : учеб. Для ссузов. — М.: Дрофа, 2009. — 395с.

Практическая работа №2.

Арифметические операции над комплексными числами.

ЦЕЛИ:

учебная, развивающая: научить выполнять действия над комплексными числами в алгебраической форме.

воспитательная: В процессе решения упражнений воспитывать сознательное отношение к процессу обучения и овладению практическими навыками и умениями.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ

- Ознакомиться с « Методическими указаниями» (Приложение 1)
- Выполнить самостоятельную работу по вариантам. (Приложение 2)
- Ответить на вопросы для самоконтроля (см. Приложение 3)
- Выполнить индивидуальное задание:
 - Решить математический диктант
 - Решить тест

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

$$X^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \text{ мнимая единица } i^2 = -1$$

$$Z = a + bi$$

a - действительная часть

bi - мнимая часть

b - коэффициент при мнимой части

	равные
$-Z = -a - bi$ противоположное	$a_1 = a_2$ $b_1 = b_2$

$$Z = a - bi$$

сопряженное

Свойство

$$a^2 + b^2 = (a - bi)(a + bi)$$

Комплексные числа не сравнимы, их можно сравнивать только по модулю.

$$Z = a + bi$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

по теореме Пифагора

$$a = r \cos \ell$$

$$b = r \sin \ell$$

$$\cos \ell = -\frac{a}{r}$$

$$\sin \ell = \frac{b}{r}$$

$$\operatorname{tg} \ell = \frac{b}{a}$$

$$Z = r(\cos \ell + i \sin \ell)$$

Тригонометрическая форма.

ВЫВОД

Комплексному числу соответствует точка плоскости
или радиус – вектор.

ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ.

$$Z = a + bi$$

Алгебраическая форма

$$Z_1 = a_1 + b_1 i$$

$$Z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$Z_1 + Z_2(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

$$Z_1 - Z_2(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$$

$$Z_1 * Z_2(a_1 + b_1 i) * (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + i b_1 b_2 \\ = (a_1 * a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

Степени линейной
единицы

$$I^4 = 1$$

$$I^1 = i$$

$$I^2 = -1$$

$$I^3 = -i$$

Решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D < 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b + |D|i}{2a}$$

$$D = \sqrt{-1} * D = i|D|$$

Пример: Решить уравнение

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$$D = 1 - 4 = -3 < 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

РЕШИТЬ ЗАДАЧИ САМОСТОЯТЕЛЬНО**ЗАДАНИЕ 1****ВАРИАНТ 1.**

- а. Построить в координатах xOy векторы $Z_1 = 3 - j$ * 2
 $Z_2 = -j$
 - им противоположные
 - им сопряженные
- Построить в координатах xOy слагаемые и сумму комплексных чисел
 $Z_1 = 5 + j$; $Z_2 = -1 + j$ * 3
- Построить в координатах xOy уменьшаемое, вычитаемое и разность векторов $Z_1 = 3$, $Z_2 = -2 - j$ * 3

ВАРИАНТ 2

- А) Построить в координатах xOy векторы $Z_1 = 2 + j$ * 4; $Z_2 = 3.5$
 - им противоположные
 - им сопряженные
- Построить в координатах xOy слагаемые и сумму чисел $Z_1 = 2 - j$; $Z_2 = -3 - j$ * 4.
- Построить в координатах xOy уменьшаемое, вычитаемое и разность векторов $Z_1 = -3 + j$ * 2 ,
 $Z_2 = -4 - j$

ВАРИАНТ 3

- А) Построить в координатах xOy векторы $Z_1 = -1 + j$ * 2; $Z_2 = j$ * 4
 - им противоположные
 - им сопряженные
- Построить в координатах xOy слагаемые и сумму чисел $Z_1 = -3 - j$;
 $Z_2 = 1 - j$ * 4.
- Построить в координатах xOy уменьшаемое, вычитаемое и разность векторов $Z_1 = 3 + j$ * 2, $Z_2 = -1.5 - j$ * 2

ВАРИАНТ 4

- А) Построить в координатах xOy векторы $Z_1 = -2 - j$ * 3; $Z_2 = 3.5$
 - им противоположные
 - им сопряженные
- Построить в координатах xOy слагаемые и сумму чисел $Z_1 = 4$;
 $Z_2 = 1 - j$ * 3.
- Построить в координатах xOy уменьшаемое, вычитаемое и разность векторов $Z_1 = 4 - j$,
 $Z_2 = -2 - j$ * 2

ЗАДАНИЕ 2**ВАРИАНТ 1: ВЫПОЛНИТЬ ДЕЙСТВИЯ:**

- $(3 + i) + (-3 - 8i) + (5 - 4i) + (7 + 4i)$
- $i^6 + i^{20} + i^{30} + i^{36} + i^{54}$
- $\frac{1}{i^{13}} + \frac{1}{i^{23}} + \frac{1}{i^{33}}$
- $4 + 2i + (-1 + 6i) * (6 - i)$
- $\frac{1+3i}{i-2} + \frac{4i+1}{3i-1}$

ВАРИАНТ 2: ВЫПОЛНИТЬ ДЕЙСТВИЯ:

- $(1 - i) + (7 - 3i) - (2 + i) + (6 - 2i)$
- $i \times i^2 \times i^3 \times i^4$
- $\frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^5}$
- $(3 - 2i) \times (5 + 4i) - 7i + 1$
- $\frac{1-i}{1+i} + \frac{3-2i}{1+3i}$

ВАРИАНТ 3: ВЫПОЛНИТЬ ДЕЙСТВИЯ:

- $(1 + i) + (2 + 3i) - (5 + 6i) + (7 - 6i)$

2. $i^6 + i^{16} + i^{26} + i^{36} + i^{46} + i^{56}$
3. $\frac{1}{i^{11}} + \frac{1}{i^{41}} + \frac{1}{i^{75}} - \frac{1}{i^{1023}}$
4. $4 + 5i + (5 + i) \times (-2 + 3i)$
5. $\frac{2-5i}{4+i} - \frac{6-7i}{4-i}$

ВАРИАНТ 4: ВЫПОЛНИТЬ ДЕЙСТВИЯ:

1. $(4 + 9i) + (-4 + i) - (3 - 7i) + (-3 + 7i)$
2. $i^3 + i^{13} + i^{23} + i^{33} + i^{43} + i^{53}$
3. $2 + i + (5 + i) \times (15 - 3i)$
4. $\frac{1}{i^6} + \frac{1}{i^{56}}$
5. $\frac{2+i}{3-5i} - \frac{i}{i-1}$

Задание 3

ВАРИАНТ 1

1. Решить квадратные уравнение $x^2 - 4x + 5 = 0$
2. Найти действительные числа x и y из условия равенства двух комплексных чисел $2xi + 2yi + 17 = 3x + 2y + 18$
3. Выполнить действия : а) $(1 - i)$; б) $i^{17} + i \cdot 1 - i$

ВАРИАНТ 2

1. Составить квадратное уравнение по его корням:
 $X_1 = 3 - i$ $X_2 = 3 + i$
2. Найти действительные числа x и y из условия равенства двух комплексных чисел : $4x + 5y - 9 + 7(3x - y)i = 10x + 14yi$
3. Выполнить действия
а) $\frac{3i}{2+i}$ б) $i^8(1 - i)^3$

ВАРИАНТ 3

1. Решить квадратное уравнение $x^2 - 6x + 18 = 0$
2. Найти действительные числа x и y из условия равенства двух комплексных чисел $9 + 2xi + 4yi = 10i + 5x - 6y$
3. Выполнить действия : а) $(1 + i)^4$; б) $i + i^{33}$

ВАРИАНТ 4

1. Решить квадратное уравнение $x^2 + 2x + 5 = 0$
2. Найти действительные числа x и y из условия равенства двух комплексных чисел $5x - 2y + (x + y)i = 4 + 5i$
3. Выполнить действия : а) $(1 - i)$; б) $i^{42} - i^{23}$

Приложение 3

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Дайте определение комплексного числа.
2. Дайте определение мнимой единицы
3. Назовите натуральные числа.
4. Назовите рациональные числа
5. Назовите степени мнимой единицы
6. Какие комплексные числа называются равными
7. Какие комплексные числа называются сопряженными.
8. Какие комплексные числа называются противоположными
9. Как изображаются комплексные числа геометрически
10. Дайте определение модуля комплексного числа
11. Как найти аргументы комплексного числа
12. Перечислите формы записи комплексных чисел
13. Как выполнять действия над комплексными числами в алгебраической форме.
14. Назовите число сопряженное комплексному числу $Z = 2 - 3i$ и перемножив их дайте ответ
15. Чему равны корни квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Дадаян А.А. Сборник задач по математике. М., Форум, 2013.
2. Башмаков М.И. Математика. Задачник. М., Академия, 2012.

3. Дадаян А.А. Математика. М., Форум-ИНФРА-М, 2007.
4. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике. М., Дрофа, 2012.
5. Шипачев В.С. Математика. М., Юрайт, 2016.
6. Григорьев С.Г. Математика. М., Академия, 2013.
7. Богомолов Н.В. Математика : учеб. Для ссузов . — М.: Дрофа, 2009. — 395с.

Математический диктант.

ВАРИАНТ № 1

1. Записать комплексное число в тригонометрической форме.
2. Представьте в тригонометрической форма число: $-2 - 2i$.
3. Записать формулу Муавра.
4. Как умножить комплексное число в тригонометрической форме?
5. Как извлечь корень из числа в тригонометрической форме?

ВАРИАНТ № 2

1. Запишите комплексное число в показательной форме.
2. Представить в показательной форме число $Z = -i + 3$
3. Как умножить комплексные числа в показательной форме (записать формулу).
4. Как разделить комплексное число в показательной форме (записать формулу).
5. Как извлечь корень из числа в показательной форме?

Тест:

1. В каком квадратном уравнении корнями являются:

$$x_1 = \frac{5+\sqrt{3}}{2}; \quad x_2 = \frac{5-\sqrt{3}}{2}$$

- A) $x^2 - 5x + 7 = 0$ B) $x^2 + 5x + 7 = 0$ C) $x^2 - 10x + 34 = 0$

2. Выполнить действия:

$$\frac{2 + \sqrt{3} * i^{41}}{5 + \sqrt{3} * i^{19}} + \frac{(\sqrt{2} * i^{16})^2}{8 * i^{102}}$$

A) $\frac{2+i\sqrt{3}}{4}$ B) $i * \sqrt{3}$ C) $\frac{i\sqrt{3}}{4}$

3. Чему равно комплексное число в алгебраической форме, если в тригонометрической $z = 8 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

A) $z = 4 + 4\sqrt{3}$ B) $z = 4\sqrt{3} + 4i$ C) $z = 4 + 4\sqrt{3}i$

4. Чему равно произведение (в показательной форме) комплексных чисел:

$z_1 = \sqrt{3} + i, \quad z_2 = 2\sqrt{3}$
A) $4\sqrt{3} * e^{\frac{2\pi}{3}}$ B) $4\sqrt{3} * e^{\frac{\pi}{12}i}$ C) $4\sqrt{3} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$

Практическая работа №3.

Преобразование иррациональных выражений.

Цели: продолжить формирование у студентов умений применять свойства степеней и корней при преобразовании выражений, преобразования иррациональных выражений: вынесение множителя из-под знака корня и внесение множителя под знак корня.

Оборудование: доска, компьютер, проектор, экран, индивидуальные карточки-задания.

Теоретический материал:

Свойства арифметического корня

$$a > 0, b > 0,$$

$$n \geq 2, m \geq 2, k \geq 2$$

$$(m, n, k \in \mathbb{N})$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$$

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a| = \begin{cases} a, a \geq 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}$$

Применение формул сокращенного умножения

$$a-b = (\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$$

$$\sqrt{a}-\sqrt{b} = (\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})$$

$$a-b = (\sqrt[3]{a})^3 - (\sqrt[3]{b})^3 = (\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$$

$$a\sqrt{a}-b\sqrt{b} = (\sqrt{a})^3 - (\sqrt{b})^3 = (\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)$$

$$a+b = (\sqrt[3]{a})^3 + (\sqrt[3]{b})^3 = (\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$$

$$a\sqrt{a}+b\sqrt{b} = (\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3 = (\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)$$

Избавление от иррациональности

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{b}-\sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}$$

Пример 1:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{3a} * \sqrt[3]{9a^2} &= \sqrt[3]{3a9a^2} = \\ &= \sqrt[3]{27a^3} = \\ &= \sqrt[3]{27} * \sqrt[3]{a^3} = 3a \end{aligned}$$

Пример 2:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{b}-\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}} &= \frac{(\sqrt[4]{b})^2-\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}} = \\ &= \frac{\sqrt[4]{b}(\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a})}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}} = \\ &= \frac{-\sqrt[4]{b}(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}} = -\sqrt[4]{b} \end{aligned}$$

Пример 3:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + \sqrt[3]{(\sqrt{3}+4)^2} = \\ & = |\sqrt{3}-2| + |\sqrt{3}+4| = -\sqrt{3}+2+ \\ & + 4 = 6 \\ & \sqrt{3}-2 < 0, |\sqrt{3}-2| = 2-\sqrt{3} \\ & \sqrt{3}+4 > 0, |\sqrt{3}+4| = \sqrt{3}+4 \end{aligned}$$

Задания практической работы:

1. Представьте выражение $\sqrt[5]{b^6\sqrt[4]{b^4}} : \sqrt[3]{b^2\sqrt[3]{b^3}}$ в виде степени.
2. Найдите значение выражения: $((\frac{1}{9})^{-\frac{1}{2}} \cdot 49^{\frac{1}{2}} - 16^{\frac{1}{4}} \cdot (\frac{1}{125})^{\frac{1}{3}})^{-1}$.
3. Выполните действия: $(\sqrt[3]{25x^2} - \sqrt[3]{16y^2}) : (\sqrt[3]{5x} - \sqrt[3]{4y})$.
4. Выполните действия: $\frac{x^{\frac{5}{4}} - x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{4}}} : \frac{x^{\frac{1}{2}} - 1}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}}$
5. Вычислите: $(0,001)^{-\frac{1}{3}} + 27^{-\frac{2}{3}} + (6^0)^5 \cdot 2 - 3^{-4} \cdot 81^{-\frac{3}{2}} \cdot 27$
6. Вычислите: $64^{\frac{5}{6}} - (0,125)^{-\frac{1}{3}} - 32 \cdot 2^{-4} \cdot 16^{-\frac{1}{2}} + (3^0)^4 \cdot 4$
7. Найдите значение выражения: $\sqrt{16-\sqrt{31}} \cdot \sqrt{\sqrt{31}+16}$
8. Упростите выражение $\sqrt[4]{256a^4b^8c^{12}}$, если $a < 0, c \leq 0$
9. Упростите выражение: $(p^{-1} \cdot q^{\frac{5}{4}} \cdot (p^{3,5} \cdot q^{-\frac{1}{8}})^2)^{-1}$
10. Представьте выражение $\sqrt[6]{5\sqrt[5]{ac}} \cdot \sqrt[3]{a^2c}$ в виде степени.
11. Определите знак разности $\sqrt[3]{5} - \sqrt{2\sqrt[3]{3}}$
12. Найдите значение х, если $7^{2,5} = 7^{\frac{1}{2}} \cdot 49 \cdot x^{0,5}$
13. Упростите выражение: $\frac{\sqrt[6]{y^2} - 4}{\sqrt[6]{y} + 2} + 2$
14. Упростите выражение: $\frac{a^{\frac{1}{2}} - 1}{a^{\frac{1}{4}} - 1} - \sqrt[4]{a}$
15. Упростите выражение: $\frac{1+a}{1-\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}} - 2a^{\frac{1}{6}}$
16. Упростите выражение: $\frac{x^{\frac{3}{4}}+1}{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}+1} - 2x^{\frac{1}{8}}$
17. Упростите выражение: $\frac{1-y^{\frac{3}{2}}}{1+y^{\frac{1}{2}}+y} + 2\sqrt{y}$
18. Вычислите: $0,3 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{15} - 0,1$
19. Вычислите: $0,1 \cdot \sqrt{20} : \sqrt{45} - 2\frac{17}{30}$

20. Вычислите: $\frac{\sqrt{22} - \sqrt{2}}{\sqrt{11} - 11} \cdot \sqrt{11}$

21. Найдите значение выражения $\frac{y^{0,5}}{y^{0,5} + 4} + \frac{4 \cdot y^{0,5}}{y - 16}$ при $y=18$.

22. Привести к общему показателю корня: $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt{5}$

23. Сократить показатели корней и подкоренных выражений:

$$\sqrt[8]{81x^4y^4}$$

24. Извлечь корень: $\sqrt{0,01 \cdot 81}$; $\sqrt[3]{27 \cdot 8}$

25. Выполните действия: $\sqrt{a^3 \cdot \sqrt{b}} \cdot \sqrt{b^{-1} \cdot \sqrt{a^3}}$

26. Вычислите: $-0,2^3 \cdot 0,2^{-2} + 64^{\frac{1}{6}} + 5^3 : 5^4 - 1,5^0$

27. Привести к общему показателю корня: $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{3}$

28. Сократить показатели корней и подкоренных выражений:

$$\sqrt[4]{25x^2y^2}$$

29. Извлечь корень: $\sqrt{25 \cdot 64}$; $\sqrt[n]{a^{3n} \cdot (a - b)^n}$

30. Выполните действия: а) $0,5\sqrt{24} - 3\sqrt{40} - (\sqrt{150} + \sqrt{54} - \sqrt{1000})$; б) $\sqrt[4]{7 - \sqrt{33}} \cdot \sqrt[4]{7 + \sqrt{33}}$

31. Вычислите: $-0,5^2 : 0,5^3 - 27^{\frac{1}{3}} + 4^4 \cdot 4^{-2} - 0,2^0$

Вопросы для самоконтроля

1. Что значит возвести число в степень n ?
2. Как перемножить две степени с одинаковыми основаниями?
3. Как разделить две степени с одинаковыми основаниями?
4. Как возвести степень в степень?
5. Как извлечь корень из степени?
6. Чему равна нулевая степень числа?
7. Как найти степень с отрицательным показателем?
9. Как найти корень с дробным показателем?
10. Сформулируйте основное свойство корня.
11. Как извлечь корень из произведения?
12. Как извлечь корень из дроби?
13. Как извлечь корень из степени?
14. Как производится умножение корней одинаковой степени?
15. Как производится умножение корней разных степеней?
16. Как производится деление корней одинаковой степени?
17. Как производится возведение корня в степень?

Список литературы.

1. Алимов Ш.А. и др. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (базовый и углубленный уровни). 10—11 классы. — М., 2014.
2. Богомолов Н.В. Математика: учебник для прикладного бакалавриата / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2014.

Практическая работа №4.

Нахождение области допустимых значений выражений, содержащих радикалы.

Цель: Формирование навыков нахождения области определения функций, и вычисления частных значений функций

Требования к выполнению работы:

1. Ответить на теоретические вопросы.
2. Оформить задания в тетради для практических работ.

Теоретический материал

Переменная y называется *функцией* переменной x , если каждому допустимому значению x соответствует определенное значение y .

Символически функциональная зависимость между переменной y (функцией) и переменной x (аргументом) записывается с помощью равенства $y = f(x)$, где f обозначает совокупность действий, которые надо произвести над x , чтобы получить y .

Числовое значение функции, соответствующее данному числовому значению аргумента, называется *частным значением этой функции*. Например, функция $y = f(x)$, при $x = a$ принимает значение $y = f(a)$.

Областью определения (существования) функции $D(y)$ называется множество всех действительных значений аргумента x (множество всех точек числовой оси), при которых она имеет действительное значение.

Множеством значений функции $E(y)$ называется множество всех действительных значений функции y , которые она может принимать.

Для задания функции необходимо и достаточно задать закон соответствия f , по которому для каждого значения аргумента можно указать единственное значение функции и область определения $D(y)$.

Функция может быть задана аналитически (формулой), таблицей, графиком или каким-либо другим способом.

работа на нахождения области определения функции	
Вариант 1 Найти $D(y)$	Вариант 2 Найти $D(y)$
1) $y = \frac{2x-1}{\frac{3}{5}}$ 2) $y = \frac{x-5}{x-3}$ 3) $y = \frac{x-3}{(x+3)(2-x)}$ 4) $y = \sqrt{100 - 10x}$ 5) $y = \sqrt{3x^2 - 48}$ 6) $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$ 7) $y = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{35-x}}$ 8) $y = \sqrt{\frac{2x+1}{x+3}}$ 9) $y = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-5x+4}$	1) $y = \frac{x^2+1}{\frac{3}{24}}$ 2) $y = \frac{24-x}{(x-3)(4x+2)}$ 3) $y = \frac{(x-3)(4x+2)}{(2x-7)(x+6)}$ 4) $y = \sqrt{10x - 100}$ 5) $y = \sqrt{75 - 3x^2}$ 6) $y = \sqrt{2x^2 - 9x + 7}$ 7) $y = \frac{\sqrt{27-x}}{\sqrt{x+32}}$ 8) $y = \sqrt{\frac{3x+6}{2x+1}}$ 9) $y = \frac{\sqrt{x+3}}{x^2-6x+5}$
Самостоятельная работа на нахождения области определения функции	
Вариант 3 Найти $D(y)$	Вариант 4 Найти $D(y)$
1) $y = \frac{2x-1}{\frac{3}{5}}$ 2) $y = \frac{x-5}{x-3}$ 3) $y = \frac{x-3}{(x+3)(2-x)}$ 4) $y = \sqrt{100 - 10x}$ 5) $y = \sqrt{3x^2 - 48}$ 6) $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$ 7) $y = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{35-x}}$ 8) $y = \sqrt{\frac{2x+1}{x+3}}$ 9) $y = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-5x+4}$	1) $y = \frac{x^2+1}{\frac{3}{24}}$ 2) $y = \frac{24-x}{(x-3)(4x+2)}$ 3) $y = \frac{(x-3)(4x+2)}{(2x-7)(x+6)}$ 4) $y = \sqrt{10x - 100}$ 5) $y = \sqrt{75 - 3x^2}$ 6) $y = \sqrt{2x^2 - 9x + 7}$ 7) $y = \frac{\sqrt{27-x}}{\sqrt{x+32}}$ 8) $y = \sqrt{\frac{3x+6}{2x+1}}$ 9) $y = \frac{\sqrt{x+3}}{x^2-6x+5}$

работа на нахождения области определения функции	
Вариант 5 Найти D(y)	Вариант 6 Найти D(y)
1) $y = \frac{2x-1}{3}$ 2) $y = \frac{x-5}{x-3}$ 3) $y = \frac{x-3}{(x+3)(2-x)}$ 4) $y = \sqrt{100-10x}$ 5) $y = \sqrt{3x^2-48}$ 6) $y = \sqrt{2x^2-5x+2}$ 7) $y = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{35-x}}$ 8) $y = \sqrt{\frac{2x+1}{x+3}}$ 9) $y = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-5x+4}$	1) $y = \frac{x^2+1}{3}$ 2) $y = \frac{24}{24-x}$ 3) $y = \frac{(x-3)(4x+2)}{(2x-7)(x+6)}$ 4) $y = \sqrt{10x-100}$ 5) $y = \sqrt{75-3x^2}$ 6) $y = \sqrt{2x^2-9x+7}$ 7) $y = \frac{\sqrt{27-x}}{\sqrt{x+32}}$ 8) $y = \sqrt{\frac{3x+6}{2x+1}}$ 9) $y = \frac{\sqrt{x+3}}{x^2-6x+5}$

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется функцией?
2. Что нужно указать для задания функции?
3. Какие способы задания функции существуют?
4. Перечислите основные свойства функций.
5. Какая функция называется обратной к данной?

Практическая работа №5.

Преобразование выражений, содержащих степени.

I. Цель: студент должен уметь вычислять и сравнивать корни, выполнять прикидки значения корня; находить значение степени, записывать корни в виде степени с дробным показателем и наоборот; применять свойства степеней и корней при вычислениях и преобразованиях выражений.

Вариант №1	Вариант №2	Критерии оценивания
Задание 1. Запишите в виде степени двойки следующие числа:		2 балла
а) 8 б) 1/2 в) 0,5 г) $\sqrt{2}$	а) 1024 б) 1/16 в) 0,25 г) $\sqrt[3]{4}$	
Задание 2 Запишите в виде степени с рациональным показателем:		2 балла
а) $\sqrt[4]{27}$ б) $\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt{125}}$	а) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{5}\right)^2}$ б) $\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$	0,5 б.
		0,5 б.
Задание 3 Запишите с помощью радикалов		1,5 балла
а) $3^{-\frac{6}{5}}$ б) 53,2 в) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{5}}$	а) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{10}{3}}$ б) 2-0,25 в) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{5}}$	0,5 б.
		0,5 б.
		0,5 б.
Задание 4 Вычислить		1 балла
$3^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 16^0$	$2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 16^1$	
Задание 5 Доказать, что:		1,5 балла
1) $a^{-3} \cdot a^5 = a^2$; 2) $a^{-4} : a^{-3} = a^7$; 3) $(a^3)^3 = a^9$.	1) $a^{-3} \cdot a^5 = a^2$; 2) $a^{-3} : a^{-3} = a^7$; 3) $(a^2)^3 = a^6$.	0,5 б.
		0,5 б.
		0,5 б.

Задание 6 Упростите выражения		1,5 балла
1) $\sqrt[6]{x}\sqrt{x}$; 2) $\sqrt[6]{x^3}^{12}\sqrt{x^5}$; 3) $\sqrt{\sqrt{a^{16}}}$.	1) $\sqrt[3]{x}\sqrt{x}$; 2) $\sqrt[6]{x^3}\sqrt[6]{x^5}$; 3) $\sqrt{\sqrt{a^8}}$.	0,5 б. 0,5 б. 0,5 б.
Задание 7 Выполнить действия и приведите выражения к виду, не содержащему отрицательных показателей степеней, там, где это необходимо:		7 балла
1) $a^4 \cdot a^{-4}$ 2) $b^6 \cdot b^{-4}$ 3) $d^2 \cdot d^{-3}$ 4) $m^{-2} \cdot m^{-5}$ 5) $k^{-1} : k^6$ 6) $x^3 : x^{-4}$ 7) $y^2 : y^3$ 8) $2a^3 : \left(\frac{2}{3}a\right)$ 9) $1,5x^{-2} : (4x^{-5})$ 10) $\frac{4}{7}m^7 : \left(1\frac{3}{4}m^3\right)$ 11) $8r^5 : \left(\frac{2}{3}r^7\right)$ 12) $3m^1n^3 : \left(\frac{3}{4}m^3n^{-3}\right)$ 13) $0,5a^{-2}b^2 \cdot (4a^3b^3)$ 14) $\frac{7}{11}t^2s^6 \cdot \left(1\frac{4}{7}t^1s^{-2}\right)$	1) $a^5 \cdot a^{-5}$ 2) $b^5 \cdot b^{-4}$ 3) $d^1 \cdot d^{-3}$ 4) $m^{-2} \cdot m^{-5}$ 5) $k^{-1} : k^6$ 6) $l^{-2} : l^{-1}$ 7) $x^2 : x^{-4}$ 8) $2a^2 : \left(\frac{2}{3}a\right)$ 9) $1,5x^{-2} : (4x^{-5})$ 10) $\frac{4}{7}m^7 : \left(1\frac{3}{4}m^3\right)$ 11) $8r^5 : \left(\frac{2}{3}r^7\right)$ 12) $0,5a^{-2}b^2 \cdot (4a^3b^3)$ 13) $\frac{7}{11}t^2s^6 \cdot \left(1\frac{4}{7}t^1s^{-2}\right)$ 14) $16p^1q^3 : \left(\frac{4}{7}p^{-3}q^{-2}\right)$	0,5 б. 0,5 б. 0,5 б. 0,5 б. 0,5 б. 0,5 б. 0,5 б. 0,5 б. 0,5 б. 0,5 б. 0,5 б. 0,5 б. 0,5 б.

Максимальное количество баллов – 16,5. Критерии оценивания: оценка «5» - 14-16,5 баллов, оценка «4» - 10-13,5 баллов, оценка «3» - 9,5-6,5 баллов, оценка «2» - 6 баллов и менее.

Практическая работа №6-7.

Цель работы: научиться преобразовывать логарифмические выражения

В результате выполнения практической работы студент должен:

знать:

- определение логарифма числа, основное логарифмическое тождество, свойства логарифмов, формулы перехода
- определение десятичного и натурального логарифма
- понятие логарифмирования и потенцирования

уметь:

- вычислять логарифмы чисел
- преобразовывать логарифмические выражения

Краткие теоретические сведения

Логарифм положительного числа b по основанию a , где $a > 0, a \neq 1$ – это показатель степени, в которую нужно возвести числа a , чтобы получить b

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b \text{ где } a > 0, a \neq 1, b > 0$$

Например: $\log_2 16 = 4$, т.к. $2^4 = 16$

Основное логарифмическое тождество

$$a^{\log_a b} = b$$

Свойства логарифмов

$$1) \log_a a = 1$$

$$2) \log_a 1 = 0$$

$$3) \log_a b^m = m \cdot \log_a b$$

$$4) \log_a b_1 \cdot b_2 = \log_a b_1 + \log_a b_2$$

$$5) \log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$$

Формулы перехода

$$1) \log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b$$

$$2) \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$3) \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Десятичный логарифм – логарифм по основанию 10, обозначается $\lg a$, т.е. $\lg a = \log_{10} a$

Натуральный логарифм – логарифм по основанию e , где e – экспонента, $e \approx 2,7$, обозначается $\ln a$, т.е. $\ln a = \log_e a$

Логарифмирование - нахождение логарифма числа по заданному числу

Потенцирование - нахождение числа по заданному логарифму.

Образец решения задач

Задание 1. Вычислите значение логарифма: а) $\log_4 \frac{1}{128}$, б) $\log_2 0.125$, в) $\log_{\frac{1}{16}} \sqrt[5]{256}$

Решение:

$$\text{а) } \log_4 \frac{1}{128} = \log_{2^2} 2^{-7} = -\frac{7}{2} \log_2 2 = -3.5$$

$$\text{б) } \log_2 0.125 = \log_2 2^{-3} = -3 \log_2 2 = -3$$

$$\text{в) } \log_{\frac{1}{16}} \sqrt[5]{256} = \log_{4^{-2}} 4^{\frac{4}{5}} = -\frac{4}{5 \cdot 2} \log_4 4 = -0.4$$

Задание 2 Вычислите значение логарифма: а) $\log_{\frac{2}{3}} \log_{343} 49$, б) $\log_{\sqrt{2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$

Решение:

$$\text{а) } \log_{\frac{2}{3}} \log_{343} 49 = \log_{\frac{2}{3}} \log_{7^3} 7^2 = \log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{3} = 1$$

$$\text{б) } \log_{\sqrt{2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = \log_{\sqrt{2}} \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \log_{\sqrt{2}} 2 = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2 = 2$$

Задание 3. Вычислите значение числа: $8^{\log_{64} 12}$

Решение:

$$8^{\log_{64} 12} = 2^{3 \log_{2^6} 12} = 2^{\frac{1}{2} \log_2 12} = 2^{\log_2 \sqrt{12}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Задание 4. Вычислите $\log_4 192 - \log_4 3$

Решение:

$$\log_4 192 - \log_4 3 = \log_4 \left(\frac{192}{3}\right) = \log_{2^2} 2^6 = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \log_2 2 = 3 \log_2 2 = 3$$

Задание 5. Вычислите значение числа: а) $12^{1+\log_{12} 4}$, б) $(7)^{2+\log_7 3} 7$

Решение:

$$\text{а) } 12^{1+\log_{12} 4} = 12^{\log_{12} 12 + \log_{12} 4} = 12^{\log_{12} 48} = 48$$

$$\text{б) } (7)^{2+\log_7 3} = 7^2 \cdot 7^{\log_7 3} = 49 \cdot 3 = 147$$

Задание 6. Вычислите значение числа: а) $27^{\frac{1}{3 \log_{16} 81}}$, б) $2^{\frac{4}{\log_{4\sqrt{3}} 2}}$

Решение:

$$\text{а) } 27^{\frac{1}{3 \log_{16} 81}} = 27^{\frac{1}{3 \cdot \frac{1}{\log_{81} 16}}} = 27^{\frac{1}{3} \log_{81} 16} = 3^{\frac{1}{3} \log_{3^4} 16} = 16^{\frac{1}{4}} = 2$$

$$\text{б) } 2^{\frac{4}{\log_{4\sqrt{3}} 2}} = 2^{4 \log_2 3^{\frac{1}{4}}} = 2^{\log_2 3} = 3$$

Задание 7. Найдите значение выражения $\frac{\log_4 3 - \log_4 75}{\log_4 45 + 2 \log_4 \frac{1}{3}}$

Решение:

$$\begin{aligned} \frac{\log_4 3 - \log_4 75}{\log_4 45 + 2 \log_4 \frac{1}{3}} &= \frac{\log_4 3 - \log_4 75}{\log_4 45 + \log_4 \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\log_4 3 - \log_4 75}{\log_4 45 + \log_4 \frac{1}{9}} = \frac{\log_4 \left(\frac{3}{75}\right)}{\log_4 \left(45 \cdot \frac{1}{9}\right)} = \\ &= \frac{\log_4 \frac{1}{25}}{\log_4 5} = \log_5 \frac{1}{25} = \log_5 5^{-2} = -2 \cdot \log_5 5 = -2 \end{aligned}$$

Задание 8. Найдите логарифм при указанном условии $\log_a 125$, если $\log_{\sqrt{a}} 25 = 8$

Решение:

$$\log_a 125 = \log_{(\sqrt{a})^2} 5^3 = \log_{(\sqrt{a})^2} \left((25)^{\frac{1}{2}} \right)^3 = \log_{(\sqrt{a})^2} 25^{\frac{3}{2}} = \log_{(\sqrt{a})^2} 25^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \log_{\sqrt{a}} 25 = \frac{3}{4} \log_{\sqrt{a}} 25, \text{ т.к. по условию } \log_{\sqrt{a}} 25 = 8, \text{ получим } \frac{3}{4} \cdot 8 = \frac{3 \cdot 8}{4} = 3 \cdot 2 = 6$$

Задания для самостоятельного решения

Вычислить значения логарифмов		
	1	2
1	$\log_4 \frac{1}{32}$	$\log_2 \log_5 \sqrt[8]{5}$
2	$\log_{25} 125$	$\log_{\sqrt{2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$
3	$\log_{\sqrt[3]{7}} \frac{1}{7}$	$\log_{\frac{1}{3}} \log_3 27$
4	$\log_{\sqrt{3}} 27$	$\log_{\frac{3}{2}} \log_{25} 125$
5	$\log_{36} \frac{1}{6}$	$\log_{\frac{2}{3}} \log_{343} 49$
6	$\log_{81} 27$	$\log_9 \log_4 \sqrt[3]{4}$
7	$\log_2 0,125$	$\log_4 \log_3 9$
8	$\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{4}$	$\log_2 \log_3 \sqrt[4]{3}$
9	$\log_4 \frac{1}{128}$	$\log_{\frac{1}{5}} \log_2 32$
10	$\log_9 \frac{1}{27}$	$\log_{\frac{1}{9}} \log_2 8$

Найти значения логарифмических выражений				
3	4	5	6	7
$0,5^{\log_{0,25} 6}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{1+0,5\log_{\frac{1}{2}} 14}$	$27^{\frac{1}{3\log_{16} 81}}$	$\log_3 153 - \log_3 17$	$\frac{\log_5 27 - 2\log_5 3}{\log_5 45 + \log_5 0,2}$
$49^{\log_7 49}$	$\left(\frac{1}{9}\right)^{1+0,5\log_{\frac{1}{3}} 18}$	$\sqrt{7}^{\frac{2}{\log_{25} 7}}$	$\log_{15} 3 + \log_{15} 75$	$\frac{2\log_{0,3} 4 + \log_{0,3} 0,5}{\log_3 6 - \log_{0,3} 12}$
$25^{\log_5 9}$	$25^{1-0,5\log_5 11}$	$2^{\frac{4}{\log_{\sqrt[4]{3}} 2}}$	$\log_3 162 - \log_3 6$	$\frac{3\log_7 2 - \log_7 24}{\log_7 3 + \log_7 9}$
$100^{\lg 16}$	$100^{2-\frac{1}{2}\lg 12}$	$7^{\frac{3}{\log_8 7}}$	$\log_{\frac{1}{6}} 3 - \log_{\frac{1}{6}} 18$	$\frac{\log_5 12 - 2\log_5 2}{\log_5 18 + \log_5 0,5}$
$0,04^{\log_{0,2} 3}$	$49^{1-\frac{1}{2}\log_7 14}$	$25^{\frac{1}{2\log_{49} 25}}$	$\log_4 192 - \log_4 3$	$\frac{\log_4 45 + 2\log_4 \frac{1}{3}}{\log_4 75 - \log_4 3}$
$8^{\log_{64} 12}$	$9^{3-\log_3 54}$	$4^{\frac{-2}{\log_5 4}}$	$\log_{0,1} 5 + \log_{0,1} 2$	$\frac{3\lg 2 + \lg 4}{\lg 7 - \lg 14}$
$16^{\log_4 81}$	$2^{2-\log_4 5}$	$49^{\frac{1}{2\log_9 7}}$	$\log_2 13 - \log_2 1\frac{5}{8}$	$\frac{2\log_5 3 - \log_5 27}{\log_5 0,2 + \log_5 45}$

$\sqrt{5}^{\log_5 81}$	$100^{0,5-\lg 5}$	$64^{\frac{1}{3\log_{27} 8}}$	$\log_{12} 36 + \log_{12} 4$	$\frac{\log_{0,3} 12 - \log_{0,3} 6}{\log_{0,3} 0,5 + \log_{0,3} 4}$
$81^{\log_9 4}$	$49^{0,5+\log_7 3}$	$11^{\frac{1}{4\log_{16} 11}}$	$\log_2 5 + \log_2 1,6$	$\frac{\log_7 9 + \log_7 3}{\log_7 24 - 3\log_7 2}$
$\sqrt{3}^{\log_3 25}$	$27^{\frac{1}{3}-\log_3 7}$	$6^{\frac{2}{\log_5 6}}$	$\log_2 36 - \log_2 144$	$\frac{\log_5 0,5 + \log_5 18}{2\log_5 2 - \log_5 12}$

Найти
8
$\log_{\sqrt[3]{a}} 27^3, \text{если } \log_9 \sqrt{a} = 4,5$
$\log_a 81, \text{если } \log_9 \sqrt{a} = 4$
$\log_{\sqrt[3]{a}} 34,3, \text{если } \log_{\sqrt{a}} 49 = 8$
$\log_a 6, \text{если } \log_6 \sqrt{a} = 4$
$\log_a 25, \text{если } \log_{\sqrt{a}} 125 = 4$
$\log_a 27, \text{если } \log_{\sqrt{a}} 9 = 2$
$\log_{\sqrt[3]{a}} 27, \text{если } \log_9 \sqrt{a} = 1,5$
$\log_a 81, \text{если } \log_9 \sqrt{a} = 2$
$\log_{\sqrt[3]{a}} 49, \text{если } \log_{\sqrt{a}} 343 = 4$
$\log_a 6, \text{если } \log_6 \sqrt{a} = 2$

Практическая работа № 8.

Преобразование алгебраических выражений.

Цель работы: научиться выполнять преобразование алгебраических, рациональных, иррациональных, степенных выражений с использованием формул сокращенного умножения, основных свойств корней и степеней.

Теоретические сведения.

КОРНИ НАТУРАЛЬНОЙ СТЕПЕНИ ИЗ ЧИСЛА, ИХ СВОЙСТВА.

Корень n – степени: $\sqrt[n]{a}$, n - показатель корня, a – подкоренное выражение

Если n – нечетное число, то выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл при $\forall a$

Если n – четное число, то выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл при $a \geq 0$

Арифметический корень: $\left. \begin{matrix} \sqrt[n]{a} = b \\ n \in \mathbb{N}, a \geq 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow b \geq 0$

Корень нечетной степени из отрицательного числа: $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА КОРНЕЙ

1. Правило извлечения корня из произведения:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

2. Правило извлечения корня из дроби:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (a \geq 0, b > 0, b \neq 0)$$

3. Правило извлечения корня из корня:

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} \quad (k > 0, a \geq 0)$$

4. Правило вынесения множителя из под знака корня:

$$\sqrt[n]{ba^n} = a \sqrt[n]{b} \quad (a \geq 0, b \geq 0)$$

5. Внесение множителя под знак корня:

$$b\sqrt{3} = \begin{cases} \sqrt{3b^2}, & \text{если } b \geq 0 \\ -\sqrt{3b^2}, & \text{если } b \leq 0 \end{cases}$$

6. Показатель корня и показатель подкоренного выражения можно умножить на одно и то же число.

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k} \quad (k > 0)$$

7. Правило возведения корня в степень.

$$\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k \quad (a \geq 0, \text{ если } k \leq 0, \text{ то } a \neq 0)$$

СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n, \quad a - \text{основание степени, } n - \text{показатель степени}$$

Свойства:

1. При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются, а основание остается неизменным.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

2. При делении степеней с одинаковыми основаниями показатели вычитаются, а основание остается неизменным.

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

3. При возведении степени в степень показатели перемножаются.

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

4. При возведении в степень произведения двух чисел, каждое число возводят в эту степень, а результаты перемножают.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

5. Если в степень возводят частное двух чисел, то в эту степень возводят числитель и знаменатель, а результат делят друг на друга.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

6. Если $a > 0, b > 0$, то $a^n > b^n$

СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

$$1. \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ где } a \neq 0, n > 0$$

$$2. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$3. \quad a^0 = 1, \text{ где } a \neq 0. \text{ Если } a = 0, \text{ то } 0^0 \text{ не имеет смысла}$$

$$4. \quad \text{По определению: } a^1 = a$$

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} \Rightarrow a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Свойства:

$$1. \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$2. \quad a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$3. \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$4. \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$5. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

6. Пусть r рациональное число $0 < a < b$, тогда

$$a^r < b^r \text{ при } r > 0$$

$$a^r > b^r \text{ при } r < 0$$

7. Для любых рациональных чисел r и s из неравенства $r > s$ следует

$$a^r > a^s \text{ при } a > 1$$

$$a^r < a^s \text{ при } 0 < a < 1$$

Формулы сокращённого умножения.

Квадрат суммы

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Квадрат разности

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Разность квадратов

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Куб суммы

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Куб разности

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Сумма кубов

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Разность кубов

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

II. Пример 1. Упростите выражение $\frac{9m^{\frac{1}{2}} \cdot m^{\frac{3}{2}}}{m^{-3}}$.

III. Решение

IV. Применим свойства степеней (умножение степеней с одинаковым основанием

и деление степеней с одинаковым основанием): $\frac{9m^{\frac{1}{2}} \cdot m^{\frac{3}{2}}}{m^{-3}} = 9m^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - (-3)} = 9m^7$.

V. **Ответ:** $9m^7$.

VI. Пример 2. Сократить дробь: $\frac{x^3 - 1}{(x - 1)(x + 2)}$

Решение. Так область определения дроби $\frac{x^3 - 1}{(x - 1)(x + 2)}$ все числа, кроме $x \neq 1$ и $x \neq -2$. Вместе с тем $\frac{x^3 - 1}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)(x + 2)}$. Сократив дробь, получим $\frac{x^2 + x + 1}{x + 2}$. Область определения полученной дроби: $x \neq -2$, т.е. шире, чем область определения первоначальной дроби. Поэтому дроби $\frac{x^3 - 1}{(x - 1)(x + 2)}$ и $\frac{x^2 + x + 1}{x + 2}$ равны при $x \neq 1$ и $x \neq -2$.

$$\frac{a^2 - 9}{a + 3} = \frac{(a - 3)(a + 3)}{(a + 3)} = a - 3$$

Пример 3. Сократить дробь:

$$\frac{6}{x - 5} + \frac{2}{5 - x} = \frac{6}{x - 5} - \frac{2}{x - 5} = \frac{4}{x - 5}$$

Пример 4. Упростить:

$$\frac{3y^2 - 6y}{y^2 - 4} = \frac{3y(y - 2)}{(y - 2)(y + 2)} = \frac{3y}{y + 2}$$

Пример 5. Упростить:

$$\frac{2}{x^2} - \frac{4}{x} = \frac{2 - 4x}{x^2}$$

Пример 6. Упростить:

$$\frac{x^2 - 5x}{x^2 - 25}; x^2 = \frac{x(x - 5)}{(x - 5)(x + 5)x^2} = x(x + 5)$$

Пример 7. Упростить:

Пример 8. Упростить: $\left(\frac{x}{2y}\right)^3 \cdot \frac{8y^3}{3x} = \frac{x^3}{3}$

Пример 9. Вычислить: $\sqrt{1\frac{24}{25}} - 3\sqrt{0,09}$

Решение. $\sqrt{1\frac{24}{25}} - 3\sqrt{0,09} = \sqrt{\frac{49}{25}} - 3 \cdot 0,3 = \frac{7}{5} - 0,9 = 1,4 - 0,9 = 0,5$

Пример 10. Упростить выражение: $(8\sqrt{18} + 6\sqrt{24} - \sqrt{72}) : (2\sqrt{6})$.

$$\frac{8\sqrt{18}}{2\sqrt{6}} + \frac{6\sqrt{24}}{2\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{72}}{2\sqrt{6}} = 4\sqrt{\frac{18}{6}} + 3\sqrt{\frac{24}{6}} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{72}{6}} =$$

Решение. $= 4\sqrt{3} + 6 - \frac{\sqrt{12}}{2} = 4\sqrt{3} + 6 - \sqrt{3} = 3\sqrt{3} + 6$

Пример 11. Сократить дробь $\frac{64-t}{8-\sqrt{t}}$, если $\sqrt{t} \neq 8$.

Решение. $\frac{64-t}{8-\sqrt{t}} = \frac{(8-\sqrt{t})(8+\sqrt{t})}{8-\sqrt{t}} = 8+\sqrt{t}$

Пример 12. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби $A = \frac{1}{\sqrt{7}-2\sqrt{2}}$.

Решение. В знаменателе имеем иррациональность 2-й степени, поэтому помножим и числитель, и знаменатель дроби на сопряженное выражение, то есть сумму чисел $\sqrt{7}$ и $2\sqrt{2}$, тогда в знаменателе будем иметь разность квадратов, которая и ликвидирует иррациональность.

$$A = \frac{1(\sqrt{7}+2\sqrt{2})}{(\sqrt{7}-2\sqrt{2})(\sqrt{7}+2\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{7}+2\sqrt{2}}{(\sqrt{7})^2 - (2\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{7}+2\sqrt{2}}{7-8} = \frac{\sqrt{7}+2\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{7}-2\sqrt{2}$$

ВАРИАНТ - I

1. Упростите выражение:

$$\left(\frac{2m+1}{2m-1} - \frac{2m-1}{2m+1}\right) \div \frac{4m}{10m-5}$$

2. Найдите значение выражения:

$$\frac{2^8 \cdot 7^9 \cdot 26^5 \cdot 2^{10}}{14^{10} \cdot 13^6 \cdot 8^4}$$

3. Представьте степень с дробным показателем в виде корня

$$c^{\frac{2}{3}}, m^{\frac{1}{2}}, d^{-\frac{3}{7}}$$

4. Привести указанное выражение к виду $a^{\frac{1}{n}}\sqrt[n]{b}$, где a - рациональное число, b - натуральное число

$$\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{5}}$$

5. Упростить:

$$\sqrt[3]{2a} \cdot \sqrt[3]{4a}; \sqrt{121 \cdot 36}$$

6. Замените арифметические корни степенями с дробным показателем

$$\sqrt[11]{2a^3}, \sqrt[10]{x}, \sqrt[3]{b^2}$$

7. Представьте выражение в виде дроби, знаменатель которой не содержит знака корня

$$\frac{3}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$$

8. Сократите дробь $\frac{b-9}{\sqrt{b}+3}$

ВАРИАНТ - II

1. Упростите выражение:

$$\frac{x+3}{x^2+3} \cdot \left(\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3}\right)$$

2. Найдите значение выражения:

$$\frac{12^5}{2^3 \cdot 4^4}$$

3. Представьте степень с дробным показателем в виде корня

$$x^{\frac{3}{4}}, y^{-\frac{5}{4}}, z^{\frac{1}{3}}$$

4. Привести указанное выражение к виду $a^{\frac{1}{n}}\sqrt[n]{b}$, где a - рациональное число, b - натуральное число

$$\frac{8}{\sqrt{10}}, \frac{b}{\sqrt{12}}$$

5. Упростить:

$$\sqrt{\frac{3}{25}}; \sqrt[3]{\sqrt{5}}$$

6. Замените арифметические корни степенями с дробным показателем

$$\sqrt[11]{n^8}, \sqrt[7]{2^6}, \sqrt[3]{t^5}$$

7. Представьте выражение в виде дроби, знаменатель которой не содержит знака корня

$$\frac{a-\sqrt{2}}{a+\sqrt{2}}$$

$\frac{5y^2}{1-y^2} \div \left(1 - \frac{1}{1-y}\right)$ 9. Выполните действие $(\sqrt{8} - \sqrt{24}) \cdot \sqrt{2}$	8. Сократите дробь $\frac{\sqrt{7}-7}{\sqrt{7}-1}$ $\left(\frac{x}{x+1} + 1\right) \cdot \frac{1+x}{2x-1}$ 9. Выполните действие $\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{22})$
--	--

ВАРИАНТ - III

1. Выполните действие:

$$\frac{a^2 - 9}{2a^2 + 1} \cdot \left(\frac{6a+1}{a-3} + \frac{6a-1}{a+3}\right)$$

2. Найдите значение выражения:

$$\frac{14^{10} \cdot 7^9}{2^8 \cdot 7^9} \div \frac{13^6 \cdot 8^4}{26^5}$$

3. Представьте степень с дробным показателем в виде корня

$$s^{\frac{3}{4}}, g^{\frac{1}{3}}, q^{-\frac{1}{4}}$$

4. Привести указанное выражение к виду $a^n \sqrt[b]{b}$, где а-рациональное число, b – натуральное число

$$\frac{m}{\sqrt{2}}, \frac{10}{\sqrt{33}}$$

5. Упростить:

$$\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}; \sqrt{162} \cdot \sqrt{2}$$

6. Замените арифметические корни степенями с дробным показателем

$$\sqrt[9]{3^{11}}, \sqrt[39]{2^4}, \sqrt[93]{m^{12}}$$

7. Представьте выражение в виде дроби, знаменатель которой не содержит знака корня

$$\frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$$

10. Выполните действие:

8. Сократите дробь

$$\frac{ab + b^2}{3} \div \frac{b^3}{3a} + \frac{a+b}{b}$$

$$\frac{b^2 - 5}{b - \sqrt{5}}$$

9. Выполните действие

$$\sqrt{5} \cdot (3\sqrt{5} + 5\sqrt{8})$$

ВАРИАНТ - IV

1. Выполните действие:

$$\left(\frac{5x+y}{x-5y} + \frac{5x-y}{x+5y}\right) \div \frac{x^2 + y^2}{x^2 - 25y^2}$$

2. Найдите значение выражения:

$$\frac{12^5}{2^3 \cdot 3^4} \div \frac{10^5}{2^6 \cdot 5^7}$$

3. Представьте степень с дробным показателем в виде корня

$$p^{\frac{2}{9}}, r^{-\frac{7}{3}}, e^{\frac{1}{8}}$$

4. Привести указанное выражение к виду $a^n \sqrt[b]{b}$, где а-рациональное число, b – натуральное число

$$\frac{3}{\sqrt{8}}, \frac{22}{\sqrt{5}}$$

5. Упростить:

$$\sqrt{\frac{2}{7}}; \sqrt[3]{\sqrt{7}}$$

6. Замените арифметические корни степенями с дробным показателем

$$\sqrt[9]{z^{51}}, \sqrt[8]{2^3}, \sqrt[4]{5^9}$$

7. Представьте выражение в виде дроби, знаменатель которой не содержит знака корня

$$\frac{1}{\sqrt{5} - 2}$$

1

0. Выполните действие:

8. Сократите дробь

$$\frac{x-y}{x} - \frac{5y}{x^2} \cdot \frac{x^2 - xy}{5y}$$

$$\frac{m + \sqrt{6}}{6 - m^2}$$

9. Выполните действие

$$\sqrt{ab} \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

ВАРИАНТ - V**1. Упростите выражение:**

$$\left(\frac{a}{b^2 - ab} + \frac{b}{a^2 - ab} \right) \cdot \frac{ab}{b - a}$$

2. Найдите значение выражения:

$$\frac{12^5}{2^3 \cdot 3^4} \cdot \frac{10^5}{2^6 \cdot 5^7}$$

3. Представьте степень с дробным показателем в виде корня

$$i^{\frac{1}{27}}, u^{-\frac{11}{36}}, t^{\frac{13}{2}}$$

4. Привести указанное выражение к виду $a^{\frac{1}{n}}\sqrt[n]{b}$, где а - рациональное число, b – натуральное число

$$\frac{2v}{\sqrt{55}}, \frac{83}{\sqrt{7}}$$

5. Упростить:

$$\sqrt[8]{2\sqrt{11}}; \sqrt[3]{27 \cdot 64}$$

6. Замените арифметические корни степенями с дробным показателем

$$\sqrt[9]{6^2}, \sqrt[6]{c^4}, \sqrt[8]{12^3}$$

7. Представьте выражение в виде дроби, знаменатель которой не содержит знака корня

$$\frac{4}{\sqrt{10} - \sqrt{2}}$$

10.**Выполните действие:****8. Сократите дробь**

$$\left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x} \right) \div \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right)$$

$$\frac{2 - \sqrt{x}}{x - 4}$$

9. Выполните действие

$$(\sqrt{m} - \sqrt{n}) \cdot \sqrt{mn}$$

ВАРИАНТ - VI**1. Упростите выражение:**

$$\left(\frac{x}{xy - y^2} - \frac{y}{x^2 - xy} \right) \div \frac{x^2 - y^2}{8xy}$$

2. Найдите значение выражения:

$$\frac{2^8 \cdot 7^9}{14^{10}} \div \frac{26^5}{13^6 \cdot 8^4}$$

3. Представьте степень с дробным показателем в виде корня

$$j^{\frac{31}{8}}, l^{\frac{1}{8}}, h^{\frac{1}{25}}$$

4. Привести указанное выражение к виду $a^{\frac{1}{n}}\sqrt[n]{b}$, где а - рациональное число, b – натуральное число

$$\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{w}{\sqrt{c}}$$

5. Упростить:

$$\frac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{2}}; \sqrt{75 \cdot 48}$$

6. Замените арифметические корни степенями с дробным показателем

$$\sqrt[9]{f^8}, \sqrt[6]{21^3}, \sqrt[3]{1^2}$$

7. Представьте выражение в виде дроби, знаменатель которой не содержит знака корня

$$\frac{14}{1 + 5\sqrt{2}}$$

10.**Выполните действие****8. Сократите дробь**

$$\left(\frac{a}{m^2} + \frac{a^2}{m^3} \right) \div \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{m}{a} \right)$$

$$\frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1}$$

9. Выполните действие

$$(2\sqrt{x} - 3\sqrt{y}) \cdot (2\sqrt{x} + 3\sqrt{y})$$

**Практическая работа № 9.
Взаимное расположение плоскостей.**

Цели:**Дидактические:**

- 1) Проконтролировать уровень усвоения теоретического материала.
- 2) Рассмотреть взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, двугранный угол, систематизировать и закрепить эти понятия в ходе решения типовых задач по этой теме.
- 3) Корректировка знаний, умений, навыков.

Развивающие:

- 1) Развивать пространственное воображение, аккуратность и точность при построении чертежей к задачам;
- 2) Развивать умение выделять главное, развивать умение обобщать, делать вывод на основе сравнения.

Воспитательные:

- 1) Поддерживать интерес к предмету, воспитывать познавательную активность, способствовать формированию коммуникативной компетентности.

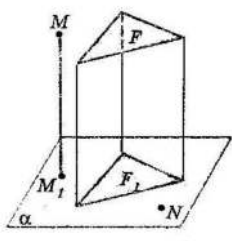
План занятия:

1) Подготовительный этап.

Повторение опорных знаний.

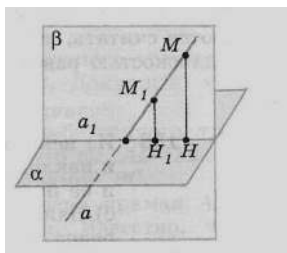
- 1) Взаимное расположение прямых.
- 2) Взаимное расположение плоскостей.
- 3) Взаимное расположение прямой и плоскости.
- 4) Двугранный угол (чертёж).
- 5) Линейный угол двугранного угла.
- 6) Проекция точки и прямой на плоскость.
- 7) Угол между прямой и плоскостью (чертёж).
- 8) Расстояние от точки до прямой.
- 9) Расстояние от точки до плоскости.

2) Теоретический этап.

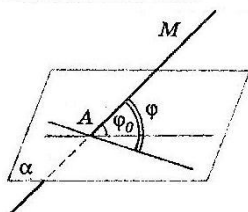


проекцией на
Если прямая
плоскость

Проекцией точки на плоскость называется основание перпендикуляра, проведённого из этой точки к плоскости, если точка не лежит в плоскости, и сама точка, если она лежит в плоскости.



Проекцией прямой на плоскость, не перпендикулярную к этой прямой, является прямая. Если данная прямая параллельна плоскости, то её проекция является прямой, параллельной данной. Если прямая перпендикулярна к плоскости, то её проекция на эту плоскость является точкой пересечения этой прямой с плоскостью.

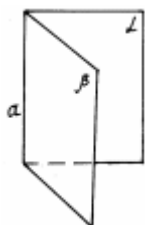


Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту плоскость, называется угол между прямой и её проекцией на плоскость.

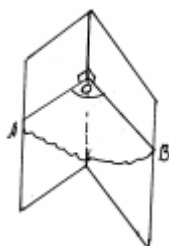
Угол между параллельными прямой и плоскостью равен 0° .

Угол между прямой перпендикулярной к плоскости считается равным 90° .

Двугранным углом называется фигура, образованная прямой a и двумя полуплоскостями с общей границей a , и не принадлежащими одной плоскости.



a - ребро двугранного угла, полуплоскости α, β - грани его.



Угол AOB - линейный угол двугранного угла. Чтобы его построить, нужно выбрать произвольную точку O на ребре, а лучи OA и OB должны быть перпендикулярны к ребру.

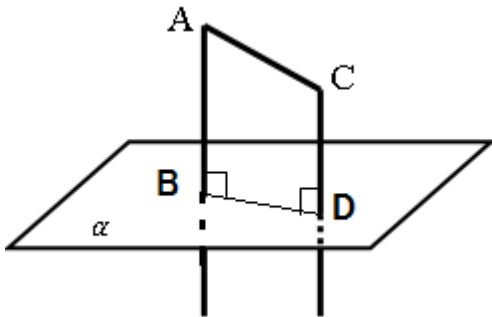
Задача 1

Две прямые образуют прямой угол с плоскостью α . Длина отрезка $AB = 59,5$ см, длина отрезка $CD = 38,5$ см. Найдите длину AC , если $BD = 20$ см.

Свойства перпендикулярности прямой и плоскости.

1. Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

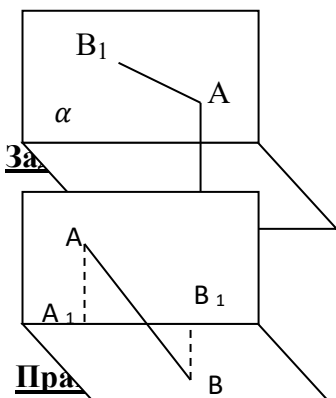
2. Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.



Задача 2

Двугранный угол равен 60° . На одной грани двугранного угла дана точка В, расстояние от которой до ребра равно 6 см. Чему равно расстояние от точки В до второй грани двугранного угла?

Задача 3



В двугранном угле, грани которого перпендикулярны, дана точка А. Расстояния от точки А до граней $AA_1=3$ см и $AB_1=4$ см. Определите расстояние АВ, до ребра двугранного угла.

В прямом двухгранном угле дан отрезок АВ так, что один конец отрезка находится в одной грани угла, а второй конец в другой грани угла. Расстояния от точек А и В до ребра угла $AA_1=6$ см, $BB_1=5$ см. Длина отрезка $A_1B_1=30$ см. Найдите длину отрезка АВ.

3) Пра

Самостоятельное применение знаний, умений и навыков.
Провести самостоятельную работу в 4 вариантах.

Планируемый результат: после выполнения практических заданий студент должен:

- уметь: выполнять чертежи к условию задачи, находить на чертежах расстояние от точки до прямой, от точки до плоскости, проекцию прямой на плоскость, применять ранее изученный теоретический материал при решении задач, обосновывать решения задач и письменно оформлять их;
- знать: основные определения и теоремы по теме «Прямые и плоскости в пространстве»;

VII. Вариант 1

VIII. на «3»:

1) Найдите длину отрезка, если его проекция на плоскость равна 9 см, а концы отрезка находятся на расстоянии 96,5 см и 56,5 см от плоскости по одну сторону от неё.

IX. на «4»:

2) Двугранный угол равен 45° . На одной грани двугранного угла дана точка В, расстояние от которой до ребра равно 26 см. Чему равно расстояние от точки В до второй грани двугранного угла?

на «5»:

3) В двугранном угле, грани которого перпендикулярны, дана точка А. Расстояния от точки до граней $AB=14$ см и $AC=48$ см. Рассчитайте расстояние AD до общей прямой, граней этого угла.

Вариант 2

X. на «3»:

1) Концы отрезка длиной 17 см находятся на расстоянии 42,5 см и 27,5 см от плоскости по одну сторону от неё. Найдите длину проекции данного отрезка на эту плоскость.

XI. на «4»:

2) Двугранный угол равен 60° . На одной грани двугранного угла дана точка В, расстояние от которой до ребра равно 20 см. Чему равно расстояние от точки В до второй грани двугранного угла?

XII. на «5»:

3) На одной из граней двугранного угла даны точки А и В, расстояния которых до ребра этого угла соответственно 15 см и 30 см. Расстояние от точки А до второй грани угла 9 см. Рассчитайте расстояние от точки В до второй грани угла.

Вариант 3

XIII. на «3»:

1) Найдите длину отрезка, если его проекция на плоскость равна 7 см, а концы отрезка находятся на расстоянии 41,5 см и 17,5 см от плоскости по одну сторону от неё.

XIV. на «4»:

2) Двугранный угол равен 30° . На одной грани двугранного угла дана точка В, расстояние от которой до ребра равно 10 см. Чему равно расстояние от точки В до второй грани двугранного угла?

XV. на «5»:

3) Двугранный угол равен 60° градусов. Внутри его дана точка А, которая находится на расстоянии 9 см от обеих граней угла. Чему равно расстояние от точки А до ребра двугранного угла?

Вариант 4

XVI. на «3»:

1) Концы отрезка длиной 13 см находятся на расстоянии 35,5 см и 23,5 см от плоскости по одну сторону от неё. Найдите длину проекции данного отрезка на эту плоскость.

XVII. на «4»:

2) Двугранный угол равен 60° . На одной грани двугранного угла дана точка В, расстояние от которой до ребра равно 12 см. Чему равно расстояние от точки В до второй грани двугранного угла?

XVIII. на «5»:

3) На одной из граней двугранного угла даны точки А и В, расстояния которых до ребра этого угла соответственно 5 см и 15 см. Расстояние от точки А до второй грани угла 3 см. Рассчитайте расстояние от точки В до второй грани угла.

Основная литература:

1. Яковлев Г.Н. Алгебра и начала анализа, часть 2.-М.,Наука,1981.
2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике -М.,ВШ,1990.
3. Богомолов Н.В., Самойленко П.И. Математика -М., Дрофа, 2006.
4. Ковалёва Г.И. Геометрия 10-11 классы. Задания на готовых чертежах.
5. Интернет ресурсы: <http://www.yaklass.ru/>

Практическая работа № 10.

Прямая перпендикулярная плоскости. Перпендикуляр и наклонная. Теорема о трех перпендикулярах.

Цели:

Дидактические:

- 4) Проконтролировать уровень усвоения теоретического материала.
- 5) Рассмотреть связь между перпендикуляром, наклонной и проекцией наклонной, систематизировать и закрепить эти понятия в ходе решения типовых задач по этой теме.
- 6) Корректировка знаний, умений, навыков.

Развивающие:

- 1) Развивать пространственное воображение.

- 2) Развивать умение выделять главное, развивать умение обобщать, делать вывод на основе сравнения;

Воспитательные:

- 1) поддерживать интерес к предмету, воспитывать познавательную активность, способствовать формированию коммуникативной компетентности.

План занятия:

4) Подготовительный этап.

Повторение опорных знаний.

- 1) Определение наклонной (чертёж).
- 2) Перпендикуляр из точки к плоскости (чертёж).
- 3) Расстояние от точки до плоскости.
- 4) Проекция наклонной (чертёж).
- 5) Угол между наклонной и плоскостью (чертёж).
- 6) Угол между наклонными (чертёж).
- 7) Угол между проекциями наклонных (чертёж).
- 8) Расстояние между основаниями наклонных (чертёж).
- 9) Теорема Пифагора.
- 10) Теорема о трёх перпендикулярах.

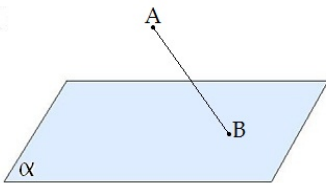
5) Теоретический этап.

Наклонной, проведенной из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости, не являющийся перпендикуляром к плоскости.

Конец отрезка, лежащий в плоскости, называется **основанием наклонной**.

AB - наклонная.

B - основание наклонной.

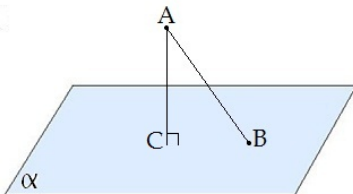


Перпендикуляром, проведенным из данной точки к данной плоскости, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости.

Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется **основанием перпендикуляра**.

AC - перпендикуляр.

C - основание перпендикуляра.



Расстоянием от точки до плоскости называется **длина перпендикуляра**, проведенного из этой точки к плоскости.

Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки, называется **проекцией**

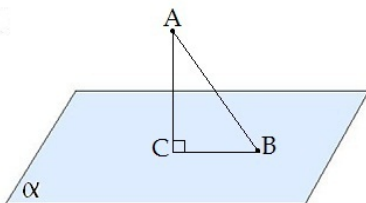
наклонной.

CB - проекция наклонной AB на плоскость α .

Треугольник ABC прямоугольный.

Углом между наклонной и плоскостью называется угол между этой наклонной и её проекцией на плоскость.

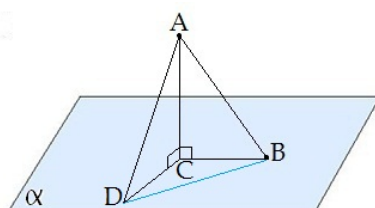
CBA - угол между наклонной AB и плоскостью α .



Если $AD > AB$, то $DC > BC$

Если из данной точки к данной плоскости провести несколько наклонных, то большей наклонной соответствует большая проекция.

DAB - угол между наклонными
DCB - угол между проекциями наклонных



Отрезок DB - расстояние между основаниями наклонных.

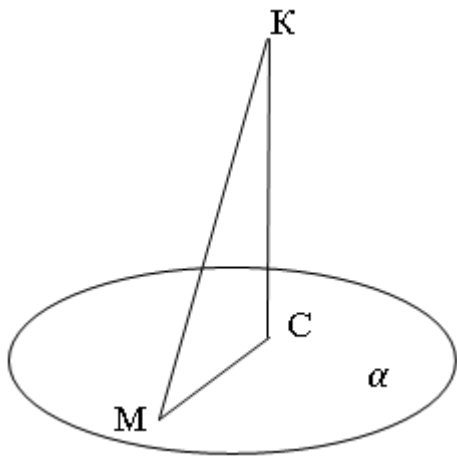
Применение знаний при решении типовых заданий.

Задача 1

Из точки К, на расстоянии 9 см, к плоскости α опущен перпендикуляр КС и проведена наклонная КМ, равная 15 см.

Найти проекцию наклонной. (Устно, менять условие, найти наклонную, найти перпендикуляр)

Решение:



Рассмотрим прямоугольный треугольник КСМ: (КС-перпендикуляр, по условию), по теореме Пифагора:

$$MC^2 = KM^2 - KS^2$$

$$MC = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ (см)}$$

Ответ: Проекция наклонной MC=12 см.

Задача2

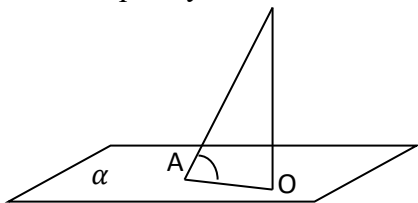
К плоскости α проведена наклонная АВ (А $\in\alpha$). Длина наклонной равна 8 см, наклонная с плоскостью образует угол 60°. Вычисли, на каком расстоянии от плоскости находится точка В.

Решение:

В

Рассмотрим треугольник

АВО: прямоугольный, ВО-



расстояние от точки В до плоскости α , перпендикулярно АО. Следовательно угол В=30°, а АО =4 см, как катет лежащий против угла в 30°.

По теореме Пифагора:

$$BO^2 = AB^2 - AO^2$$

$$BO^2 = 8^2 - 4^2$$

$$BO = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \text{ (см)}$$

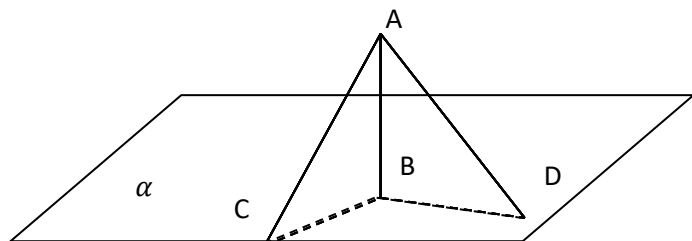
Ответ: $4\sqrt{3}$ см.

Задача 3

АВ перпендикулярно плоскости α . Наклонная АС образует с плоскостью α , угол 60°, а наклонная АД равна $\sqrt{7}$. Длина проекции наклонной BD равна 2 см.

Вычисли длину наклонной АС.

Решение:



Решение:

1) Рассмотрим $\triangle ABD$, по теореме Пифагора: $AB^2 = AD^2 - DB^2$;

$$AB = \sqrt{3}.$$

2) Угол ACB = 60°(по условию), следовательно $\angle CAB = 30^\circ$.

3) Рассмотрим $\triangle ACB$, $\frac{AB}{AC} = \sin 60^\circ$;

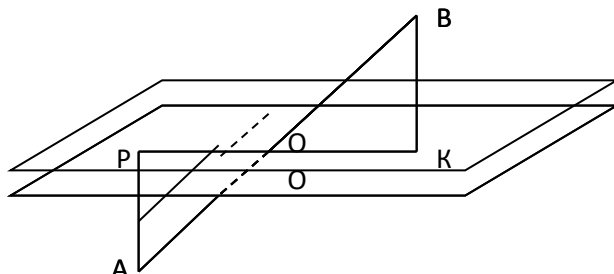
$$AC = \frac{AB}{\sin 60^\circ};$$

$$AC = 2.$$

Ответ: 2 см.

Задача 4

Отрезок АВ длиной $6\sqrt{3}$ м, пересекает плоскость β в точке О. Расстояние от концов отрезка до плоскости соответственно равны 3 м и 6 м. Найди острый угол, который образует отрезок АВ с плоскостью β .



Решение:

1. Пусть $AO=x$, тогда $OB=6\sqrt{3}-x$.

2. $\triangle APO$ подобен $\triangle BOK$ (угла при вершине О, равны как вертикальные, углы Р и К, равны 90°).

$$\frac{PA}{AO} = \frac{BK}{BO};$$

$$\frac{3}{x} = \frac{6}{6\sqrt{3}-x};$$

$$x = 2\sqrt{3};$$

3. Рассмотрим $\triangle APO$:

$$\sin PAO = \frac{PA}{AO}$$

$$\sin PAO = \frac{3}{2\sqrt{3}}$$

$$\angle PAO = 60^\circ$$

Ответ: 60°

6) Практический этап.

Самостоятельное применение знаний, умений и навыков.

Провести самостоятельную работу в 4 вариантах.

Планируемый результат: после выполнения практических заданий студент должен:

- c) уметь: выполнять чертежи по условию задачи, находить на чертежах перпендикуляр, наклонную, проекцию наклонной, угол между наклонной и плоскостью, угол между проекциями наклонных, применять ранее изученный теоретический материал при решении задач по их нахождению, обосновывать решения задач и письменно оформлять их;
- d) знать: основные определения и теоремы по теме «Перпендикуляр и наклонная»;

Вариант 1

XIX. на «3»:

- 1) Прямая a пересекает плоскость β в точке С, и образует с плоскостью угол 30° . $B \in a$, точка А - проекция точки В на плоскость β . $BC=12$ см. Найдите ВА.

XX. на «4»:

- 2) К плоскости α проведена наклонная АС ($A \in \alpha$). Длина наклонной равна 24 см, наклонная с плоскостью образует угол 60° . Вычислите, на каком расстоянии от плоскости находится точка С.

на «5»:

- 3) Наклонная АК с плоскостью α образует угол 30° , а наклонная КС с плоскостью α образует угол 45° . Длина перпендикуляра КВ равна 12 см. Вычислите длины наклонных.

Вариант 2

XXI. на «3»:

- 1) К плоскости α проведена наклонная, длина которой равна 25 см, проекция наклонной равна 15 см. На каком расстоянии от плоскости находится точка, из которой проведена наклонная?

XXII. на «4»:

- 2) К плоскости α проведена наклонная АВ ($A \in \alpha$). Длина наклонной равна 12 см, наклонная с плоскостью образует угол 45° . Вычисли, на каком расстоянии от плоскости находится точка В.

XXIII. на «5»:

- 3) Проекции наклонных AD и DC на плоскости α равны соответственно 8 см и 4 см, а угол между ними равен 120° . Вычислите расстояние между концами проекций наклонных.

Вариант 3

XXIV. на «3»:

- 1) Прямая a пересекает плоскость β в точке С, и образует с плоскостью угол 30° . $P \in a$, точка N - проекция точки Р на плоскость β . $PN=5$ см. Найдите РС.

XXV. на «4»:

- 2) К плоскости α проведена наклонная АС ($A \in \alpha$). Длина наклонной равна 16 см, наклонная с плоскостью образует угол 60° . Вычислите, на каком расстоянии от плоскости находится точка С.

XXVI. на «5»:

- 3) Наклонная AD с плоскостью α образует угол 30° , а наклонная DC с плоскостью α образует угол 45° . Длина перпендикуляра DB равна 32 см. Вычислите длины наклонных.

Вариант 4

XXVII. на «3»:

- 1) Прямая a пересекает плоскость β в точке С, и образует с плоскостью угол 30° . $P \in a$, точка F - проекция точки Р на плоскость β . $PC=14$ см. Найдите PF.

XXVIII. на «4»:

- 2) К плоскости α проведена наклонная АВ ($A \in \alpha$). Длина наклонной равна 12 см, наклонная с плоскостью образует угол 60° . Вычислите, на каком расстоянии от плоскости находится точка В.

XXIX. на «5»:

- 3) Наклонная AD с плоскостью α образует угол 30° , а наклонная DC с плоскостью α образует угол 45° . Длина перпендикуляра DB равна 22 см. Вычислите длины наклонных.

Основная литература:

6. Яковлев Г.Н. Алгебра и начала анализа, часть 2.-М.,Наука,1981.
7. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике -М.,ВШ,1990.
8. Богомолов Н.В., Самойленко П.И. Математика -М., Дрофа, 2006.
9. Ковалёва Г.И. Геометрия 10-11 классы. Задания на готовых чертежах.
10. Интернет ресурсы: <http://www.yaklass.ru/>

Практическая работа № 11.

Решение задач по теме: «Перпендикулярность прямых».

Цель: обобщение и систематизация занятий учащихся, полученных при изучении темы.

Ход работы.

1) Какие прямые называют перпендикулярными в пространстве?

2) Стороны четырехугольника $ABCD$ и прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$

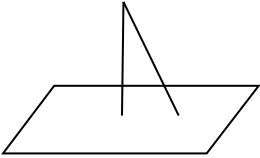
параллельны. Докажите, что $ABCD$ - прямоугольник. Сделайте рисунок.

3) Отрезки AB и CD перпендикулярны плоскости α и пересекают ее в точках A и C . Найти длину отрезка AC , если $AB=8\text{см}$, $CD=20\text{см}$, $BD=15\text{см}$. сделайте рисунок.

Дано: _____

Найти: _____

4) Сформулируйте признак перпендикулярности прямой и плоскости в пространстве.

	1. Перпендикуляр, проведенный плоскости _____; 2. Основание перпендикуляра _____; 3. Наклонная, проведенная к плоскости _____;
---	--

	4. Основание наклонной _____;
	5. Проекция наклонной _____;

5) Внесите обозначения на рисунок и укажите

6) К плоскости квадрата ABCD проведены перпендикуляр MB и наклонные MA, MC, MD. Докажите, что треугольники MAD и MCD – прямоугольные. Сделайте рисунок. Доказательство _____

7) Два равнобедренных треугольника имеют общее основание, а их плоскости образуют угол 60° . Общее основание равно 16 см, боковая сторона одного треугольника – 17 см, а боковые стороны другого треугольника перпендикулярны. Найти расстояние между вершинами треугольников, предварительно сделав рисунок.

Дано: _____

Найти: _____

Решение: _____

Практическая работа № 12.

Решение задач по теме: «Перпендикулярность плоскостей».

Тема: решение задач на нахождение двугранных углов, доказательство перпендикулярности двух плоскостей.

Цель работы: научиться решать задачи на перпендикулярность прямой и плоскости, перпендикулярность плоскостей, нахождение двугранных углов.

Задания:

1 вариант.

1. Скрещивающиеся прямые a и b параллельны соответственно сторонам AB и AC треугольника ABC. Выясните, перпендикулярны ли прямые a и b , если:

а) $AB=8$ см, $BC=6$ см, $AC=10$ см. в) $\angle C=120^\circ$, $\angle B=30^\circ$.

2. Из некоторой точки проведены к данной плоскости перпендикуляр AN и наклонная AM, угол между которыми равен φ . Перпендикуляр равен d . Найдите углы треугольника AMN, наклонную и ее проекцию, если $d=3$ см, $\varphi=60^\circ$.

3. Из данной точки к данной плоскости проведены две наклонные и перпендикуляр. Докажите, что если проекции наклонных равны, то равны и наклонные.

4. Через вершину K треугольника DKF проведена прямая KM, перпендикулярная к плоскости этого треугольника. Известно, что $KM=15$ см, $DF=12$ см, $DK=FK=10$ см. Найдите расстояние от точки M до прямой DF.

5. Дан прямоугольный параллелепипед A- D_1 . Найдите двугранный угол B_1ADB , если известно, что четырехугольник ABCD – квадрат, $AC=6\sqrt{2}$ см, $AB_1=4\sqrt{3}$ см.

6. Через сторону AD ромба ABCD проведена плоскость ADM так, что двугранный угол BADM равен 60° . Найдите сторону ромба, если $\angle BAD = 45^\circ$ и расстояние от точки B до плоскости ADM равно $4\sqrt{3}$.

2 вариант.

1. Скрещивающиеся прямые a и b параллельны соответственно сторонам AB и AC треугольника ABC. Выясните, перпендикулярны ли прямые a и b, если:

а) $AB=12\text{см}$, $BC=5\text{см}$, $AC=13\text{см}$. в) $\angle C=60^\circ$, $\angle B=30^\circ$.

2. Из некоторой точки проведены к данной плоскости перпендикуляр AH и наклонная AM, угол между которыми равен φ . Перпендикуляр равен d. Найдите все углы треугольника AMH, наклонную и ее проекцию, если $d=6\text{см}$, $\varphi=45^\circ$.

3. Из данной точки к данной плоскости проведены две наклонные и перпендикуляр. Докажите, что наклонные равны, если углы между перпендикуляром и наклонными равны.

4. Через вершину прямого угла C равнобедренного треугольника CDE проведена прямая CF, перпендикулярная к плоскости этого треугольника. Найдите расстояние от точки F до прямой DE. Известно, что $CF=35\text{см}$, $CD=12\sqrt{2}\text{см}$.

5. Дан прямоугольный параллелепипед A-D₁. Найдите двугранный угол A₁DCA, если $AC=13\text{см}$, $DC=5\text{см}$, $AA_1=12\sqrt{3}\text{см}$.

6. Через сторону AD ромба ABCD проведена плоскость ADM так, что двугранный угол BADM равен 60° . Найдите сторону ромба, если $\angle BAD = 45^\circ$ и расстояние от точки B до плоскости ADM равно $2\sqrt{3}$.

Практическая работа № 13.

Действия над векторами. Нахождение угла между векторами.

Цель: овладеть навыками использования правил действий над векторами в векторной и координатной формах.

Теоретическая часть

Любой направленный отрезок прямой называется вектором.

Вектор, заданный парой несовпадающих точек A и B, обозначается $\overrightarrow{AB}$, причем в этой записи A-начало вектора, B-его конец.

Векторы могут быть записаны с помощью строчных букв: $\vec{a}$; $\vec{v}$; $\vec{c}$, $\vec{d}$...

Нулевым вектором называется вектор, начало и конец которого совпадают. Например, $\overrightarrow{AA}$ или $\vec{0}$ является нулевым вектором.

Длиной вектора называется длина порождающего его отрезка, обозначается, $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$, говорят «модуль вектора». Длина нулевого вектора $|\overrightarrow{AA}| = 0$.

Два вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Так, на рис.1 коллинеарными являются следующие векторы: $\overrightarrow{FD}$ и $\overrightarrow{FB}$; $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{FO}$ и $\overrightarrow{CO}$. Среди коллинеарных векторов есть такие, у которых направления совпадают. Эти векторы называются сонаправленными и пишут $\overrightarrow{FO} \uparrow \overrightarrow{OC}$ (см. рис.1).

Если направления векторов противоположно направлены, то их называют противоположно направленными и пишут $\overrightarrow{CA} \updownarrow \overrightarrow{FB}$; $\overrightarrow{FO} \updownarrow \overrightarrow{CO}$. (см. рис.1)

Два коллинеарных вектора называют равными, если они сонаправлены и имеют равные длины; другими словами, $\vec{a} = \vec{b}$, если $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. На рис.2 $\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{FL}$, но $\overrightarrow{EK} \neq \overrightarrow{LF}$.

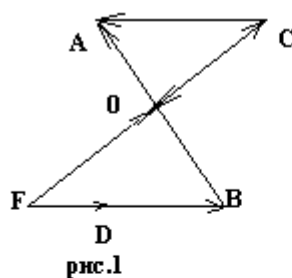


рис.1

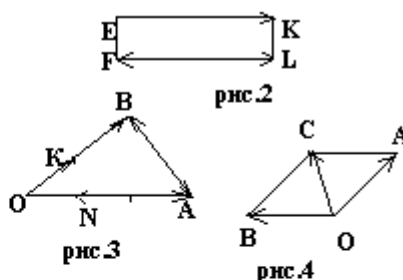


рис.3

рис.2

рис.4

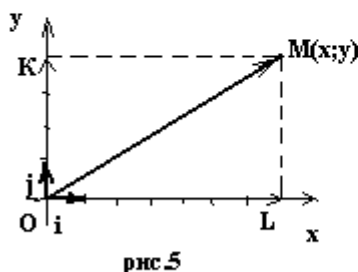


рис.5

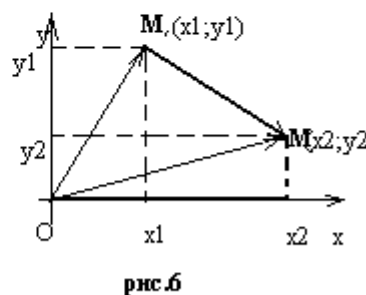


рис.6

Действия над векторами

1. Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец с концом вектора $\vec{b}$, при условии, что начало вектора $\vec{b}$ перенесено в конец вектора $\vec{a}$ (правило треугольника). На рис.3 $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$ или $\vec{OB} + \vec{BA} = \vec{OA}$. На рис.4 $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}$ (правило параллелограмма). Существует правило многоугольника.

Свойства суммы векторов:

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (переместительное свойство)
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (сочетательное свойство)
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

2. Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют сумму вектора $\vec{a}$ и $-\vec{b}$, т.е. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Векторы $\vec{b}$ и $-\vec{b}$ называются противоположными. На рис.3 $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$ и $\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{AB}$.

3. Произведением вектора $\vec{a}$ на вещественное число k называется вектор $k\vec{a}$, который имеет длину, равную $k|\vec{a}|$, и коллинеарен $\vec{a}$. При этом если $k > 0$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow k\vec{a}$; если $k < 0$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow k\vec{a}$.

На рис.3 $\vec{OK} = \frac{1}{2}\vec{OB}$; $\vec{AN} = -\frac{2}{3}\vec{OA}$.

Декартова система координат

Если задана прямоугольная система координат XOY, на осях OX и OY взяты единичные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ соответственно, то справедливо равенство $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ (см. рис.5). Докажите самостоятельно. Числа x и y называются координатами вектора $\vec{OM}$, пишут $\vec{OM}(x; y)$. На рис.5 $\vec{OM}(7; 4)$. Объясните почему.

Если вектор $\vec{M_1M_2}$ не проходит через начало координат (рис.6), то

$\vec{M_1M_2} = \vec{OM_2} - \vec{OM_1} = (x_2; y_2) - (x_1; y_1) = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, т.е. для нахождения координат вектора нужно из координат его конца вычесть координаты начала.

Пример1. Даны точки A (3;2), B(-1;5), C(0;3). Найти координаты векторов $\vec{AB}$; $\vec{BC}$; $\vec{AC}$.

Решение: $\vec{AB}(-1 - 3; 5 - 2)$, $\vec{AB}(-4; 3)$; $\vec{BC}(0 - (-1); 3 - 5)$, $\vec{BC}(1; -2)$; $\vec{AC}(-3; 1)$.

Действия над векторами, заданными своими координатами

Если векторы заданы в декартовой системе координат своими координатами, то:

1) при сложении двух и более чисел векторов их одноименные координаты складываются, т.е. если $\vec{a}(x_1; y_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2)$, то $\vec{a} + \vec{b}(x_1 + x_2; y_1 + y_2)$.

- 2) при вычитании векторов их одноименные координаты вычитаются, т.е. если $\vec{a}(x_1; y_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2)$, то $\vec{a} - \vec{b}(x_1 - x_2; y_1 - y_2)$.
- 3) при умножении вектора на число каждая координата вектора умножается на это число, т.е. если $\vec{a}(x; y)$, то $k\vec{a}(kx; ky)$.

Пример2. Даны векторы $\vec{a}_1(-2; 4)$; $\vec{a}_2(3; 1)$. Найти а) $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$; б) $\vec{a}_2 - \vec{a}_1$; в) $0,4\vec{a}_1$; г) $-\frac{1}{3}\vec{a}_2$.

Решение. Согласно приведенным правилам, получим:

а) $\vec{a}_1 + \vec{a}_2(-2 + 3; 4 + 1)$; $\vec{a}_1 + \vec{a}_2(1; 5)$. б) $\vec{a}_2 - \vec{a}_1(3 - (-2); 1 - 4)$; $\vec{a}_2 - \vec{a}_1(5; -3)$.

в) $0,4\vec{a}_1(-2 \cdot 0,4; 4 \cdot 0,4)$; $0,4\vec{a}_1(-0,8; 1,6)$. г) $-\frac{1}{3}\vec{a}_2(-1/3 \cdot 3; -1/3 \cdot 1)$; $\vec{a}_2(-1; -1/3)$.

Ответ: $\vec{a}_1 + \vec{a}_2(1; 5)$; $\vec{a}_2 - \vec{a}_1(5; -3)$; $0,4\vec{a}_1(-0,8; 1,6)$; $-\frac{1}{3}\vec{a}_2(-1; -1/3)$.

Длина вектора, расстояние между двумя точками на плоскости

Длина вектора, выходящего из начала координат (см. рис.5), равна квадратному корню из суммы квадратов его координат, т.е.

$$|\vec{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1)$$

Если вектор задан двумя точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, то $|\vec{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. (2)

По этой формуле можно найти расстояние между двумя точками, с заданными координатами (объясните почему).

Пример3. Найти длину вектора $\vec{AB}$; если А (5; 2), В (8;-2).

Решение. Применяя формулу (2), получим $|\vec{AB}| = \sqrt{(8 - 5)^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$.

Ответ: $|\vec{AB}| = 5$.

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т.е.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}; \vec{b}) \quad (3)$$

Если векторы заданы своими координатами $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2\}$, то скалярное произведение находят так:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 \quad (4)$$

Пример 4 В равностороннем треугольнике ABC со стороной, равной 4, найти скалярное произведение векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$.

Решение: так как углы в равностороннем треугольнике по 60° , то, используя формулу (3), получим

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8.$$

Ответ: 8.

Используя формулы (1), (3), (4), можно вывести формулу для нахождения косинуса угла между векторами:

$$\cos \angle(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \quad (5)$$

Пример 5 Найти угол А в треугольнике ABC, если А(6;7), В(3;3), С(1;-5).

Решение: Определим координаты векторов $\vec{AB}\{-3; -4\}$, $\vec{AC}\{-5; -12\}$. Вычислим косинус угла между векторами по формуле (5):

$$\cos \angle(\vec{AB}; \vec{AC}) = \frac{-3 \cdot (-5) + (-4) \cdot (-12)}{\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2}} = \frac{63}{5 \cdot 13} = \frac{63}{65}.$$

$$\angle(\vec{AB}; \vec{AC}) = \arccos \frac{63}{65}. \text{ Ответ: } \arccos \frac{63}{65}.$$

Задания для самостоятельного решения

1. Найти координаты векторов $\overline{AB}$; $\overline{CB}$; $\overline{CA}$, если $\overline{AB} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$; $\overline{CB} = -5\vec{i}$; $\overline{CA} = \vec{i} - 7\vec{j}$.
2. Найти координаты векторов $\overline{BA}$; $\overline{BC}$; $\overline{AC}$, если $\overline{BA} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$; $\overline{BC} = 4\vec{j}$; $\overline{AC} = -8\vec{i} + \vec{j}$.
3. Даны точки A(3;-1); B(0;-5); C(-2;1). Найти: $\overline{AB}$; $\overline{BC}$; $\overline{CA}$; $\overline{AB} + \overline{BC}$; $\overline{AC} - \overline{AB}$; $\overline{m} = 2\overline{AB} + 3\overline{BC} - 0,5\overline{CA}$.
4. Даны точки A(4;0), B(-1;3), C(5;7). Найти: $\overline{AC}$; $\overline{AB}$; $\overline{BC}$; $\overline{AB} + \overline{BC}$; $\overline{AB} - \overline{BC}$; $\overline{m} = -3\overline{AB} + 2\overline{BC} - 5\overline{AC}$.
5. Дан треугольник с вершинами F(7;7), D(4;3), C(3;4). Найти его периметр.
6. Дан треугольник ABC, A(-4;1), B(-2;4), C(0;1). Доказать, что данный треугольник равнобедренный.
7. Диагонали квадрата ABCD пересекаются в точке O. Найди угол между векторами:
а) $\overline{DC}$ и $\overline{AD}$, б) $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, в) $\overline{OA}$ и $\overline{OC}$;
8. Диагонали ромба ABCD пересекаются в точке O, и диагональ BD равна стороне ромба. Найди угол между векторами:
а) $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$; б) $\overline{DB}$ и $\overline{OB}$; в) $\overline{OC}$ и $\overline{OD}$.
9. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}\{3;5\}$, $\vec{b}\{-2;7\}$ и определить вид угла между данными векторами.
10. Вычислите скалярное произведение векторов и определить вид угла, образованного между векторами $\vec{c}\{0,5; 7\}$; $\vec{d}\{7;-0,5\}$.
11. Найти угол между векторами $\overline{FD}$ и $\overline{DC}$, если F(1;6), D(1;0), C(-2;3).
12. Найти угол между векторами $\overline{RL}$ и $\overline{OP}$, если R(0;3), O(6;-1), L(5;0), P(9;4).

Контрольные вопросы

1. Что называется координатами вектора?
2. Как найти координаты вектора, заданного двумя точками?
3. Как умножить вектор, заданный своими координатами, на число?
4. Завершить равенство $\vec{a}^{-2} = \dots$
5. Чему равно скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Рекомендуемая литература

1. В.Т. Лисичкин, И.Л. Соловейчик. Математика: учебное пособие для техникумов.-М.: Высш. шк., 1991.
2. В.Е. Гмурман. Теория вероятностей и математической статистики. 1998.
3. И.И. Валуцэ, Г.Д. Дилигул. Математика для техникумов.- М.: Наука, 1990

Практическая работа № 14.

Действия над векторами. Использование векторов при решении математических и практических задач.

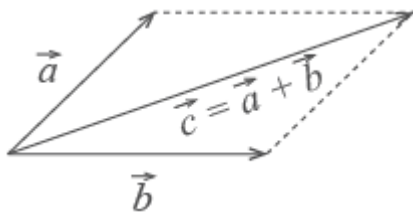
Определение: «Вектор — это направленный отрезок». **Длиной вектора** называется длина этого отрезка. Обозначается: $|\vec{a}|$ или $|\overrightarrow{AB}|$

Равными называются векторы, имеющие одинаковые длины и одинаковое направление. Это значит, что вектор можно перенести параллельно себе в любую точку плоскости. **Единичным** называется вектор, длина которого равна 1. Нулевым — вектор, длина которого равна нулю, то есть его начало совпадает с концом.

Сложение векторов

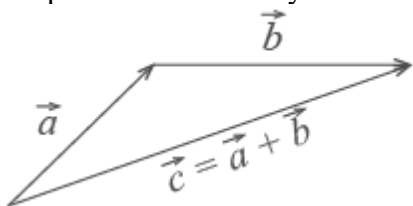
Для сложения векторов есть два способа.

1. Правило параллелограмма. Чтобы сложить векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, помещаем начала обоих в одну точку. Дорисовываем до параллелограмма и из той же точки проводим диагональ параллелограмма. Это и будет сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

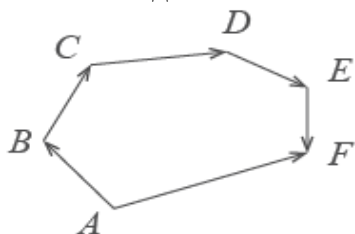


Помните басню про лебедя, рака и щуку? Они очень старались, но так и не сдвинули воз с места. Ведь векторная сумма сил, приложенных ими к возу, была равна нулю.

2. Второй способ сложения векторов — правило треугольника. Возьмем те же векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. К концу первого вектора пристроим начало второго. Теперь соединим начало первого и конец второго. Это и есть сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



По тому же правилу можно сложить и несколько векторов. Пристраиваем их один за другим, а затем соединяем начало первого с концом последнего.



$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$$

Представьте, что вы идете из пункта А в пункт В, из В в С, из С в D, затем в Е и в F. Конечный результат этих действий — перемещение из А в F.

При сложении векторов $\vec{a}(x_a, y_a)$ и $\vec{b}(x_b, y_b)$ получаем:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}, \quad \vec{c}(x_a + x_b, y_a + y_b)$$

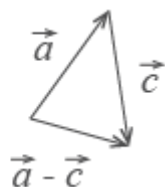
Вычитание векторов

Вектор $-\vec{c}$ направлен противоположно вектору $\vec{c}$. Длины векторов $\vec{c}$ и $-\vec{c}$ равны.



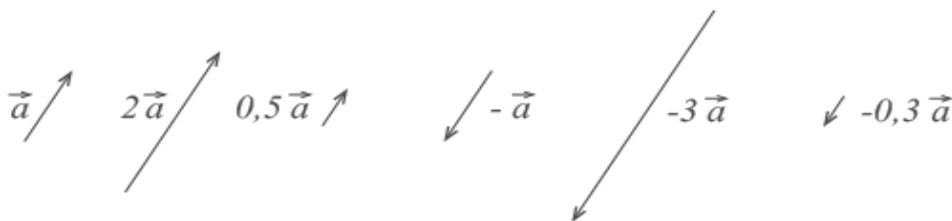
Теперь понятно, что такое вычитание векторов. Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$ — это сумма вектора $\vec{a}$ и вектора $-\vec{c}$.

$$\vec{a} - \vec{c} = \vec{a} + (-\vec{c})$$



Умножение вектора на число

При умножении вектора $\vec{a}$ на число k получается вектор, длина которого в k раз отличается от длины $\vec{a}$. Он сонаправлен с вектором $\vec{a}$, если k больше нуля, и направлен противоположно $\vec{a}$, если k меньше нуля.

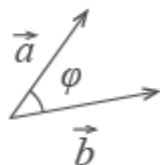


Скалярное произведение векторов

Векторы можно умножать не только на числа, но и друг на друга.

Скалярным произведением векторов называется произведение длин векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$



Если векторы перпендикулярны, их скалярное произведение равно нулю.

А вот так скалярное произведение выражается через координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$$

Из формулы для скалярного произведения можно найти угол между векторами:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2}}$$

Свойства векторов.

Определение. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **коллинеарными**, если они расположены на параллельных прямых или на одной прямой.

Нулевой вектор $\vec{0}$ коллинеарен любому вектору.

Теорема 1. Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ **коллинеарны**, $\square$ когда они пропорциональны т.е. $\vec{b} = k\vec{a}$, k – скаляр.

Определение. Три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называются **компланарными**, если они параллельны некоторой плоскости или лежат в ней.

Теорема 2. Три ненулевых вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ **компланарны**, $\square$ когда один из них является линейной комбинацией двух других, т.е. $\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b}$, k, l – скаляры.

Задания для самостоятельной работы

1. Даны координаты двух смежных вершин А и В квадрата ABCD: А(а; 0) и В(0; а). Найдите координаты остальных вершин квадрата. Сколько решений имеет задача?

2. Даны две смежные вершины параллелограмма ABCD: А(-1; 3) и В(2; 1). Найдите координаты двух других вершин параллелограмма, если известно, что диагональ АС параллельна оси Ох, а диагональ ВD параллельна оси Оу.

3. Треугольник задан координатами своих вершин: А(1; 0; -1), В(3; 2; 0) и С(-2; 4; 3). Является ли данный треугольник прямоугольным; равнобедренным?

4. Векторы $\vec{AC} = \vec{a}$ и $\vec{BD} = \vec{b}$ служат диагоналями параллелограмма ABCD. Выразите векторы $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$ и $\vec{DA}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5. Точки К и М служат серединами сторон АВ и CD выпуклого четырехугольника ABCD. Выразите вектор $\vec{KM}$ через векторы $\vec{BC}$ и $\vec{AD}$.

6. Треугольник ABC задан координатами своих вершин: $A(1; 1)$, $B(5; 4)$ и $C(13; -2)$. Определите координаты и длины векторов $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{CH}$, где AM – медиана, BD – биссектриса и CH – высота треугольника ABC.

7. Одна из вершин параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ находится в точке $A(1; 2; 3)$, а концы выходящих из нее ребер – в точках $B(9; 6; 4)$, $D(3; 0; 4)$ и $A_1(5; 2; 6)$. Найдите:

- а) длину диагонали AC_1 этого параллелепипеда;
- б) угол, образуемый этой диагональю с ребром AB;
- в) объем параллелепипеда;
- г) площадь основания ABCD и высоту параллелепипеда, опущенную на это основание.

8. Четырехугольник задан координатами своих вершин: $A(0; 0)$, $B(0; 4)$, $C(2; 4)$ и $D(7; 0)$. Можно ли в него вписать окружность?

Примечание. Если суммы противоположных сторон четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность.

9. В треугольнике ABC проведена медиана AM. Найдите ее длину, если известны координаты вершин треугольника: $A(5; -4)$, $B(-1; 2)$ и $C(5; 1)$.

10. Вычислите площадь квадрата, две смежные вершины которого $A(3; -7)$ и $B(-1; 4)$.

11. Найдите координаты точки C, делящей отрезок AB в отношении 3 : 2, считая от вершины A, если $A(-2; 1)$, $B(8; 6)$.

12. Однажды Лебедь, Рак и Щука ...

Воз расположен в точке O пересечения медиан треугольника ABC, а Лебедь, Рак и Щука – в вершинах треугольника. Определите суммарное воздействие на воз, т.е. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

13. Лежат ли точки $A(2; 4; 1)$, $B(3; 7; 5)$ и $C(4; 10; 9)$ на одной прямой?

Указание. I способ. Используйте условие коллинеарности векторов.

II способ. Сравните расстояния AB, BC и AC.

14. В треугольнике ABC известно: $\overrightarrow{AB}(3; -4)$ и $\overrightarrow{BC}(1; 5)$. Вычислите длину высоты CH этого треугольника.

Указание. С помощью векторного произведения векторов определите площадь треугольника, а затем воспользуйтесь формулой площади треугольника, которая выражается через высоту.

15. Треугольник ABC задан координатами своих вершин: $A(1; 1)$, $B(5; 4)$ и $C(13; -2)$ – условия задачи 6 (см. выше). Вычислите площадь треугольника ABC различными способами:

- а) с помощью основания и высоты (используйте результат задачи 6);
- б) с помощью формулы $S_{\Delta} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma$;
- в) с помощью формулы Герона;
- г) с помощью векторного произведения.

16. Зная одну из вершин треугольника ABC $A(2; -5; 3)$ и векторы, совпадающие с двумя его сторонами $\overrightarrow{AB}(4; 1; 2)$ и $\overrightarrow{BC}(3; -2; 5)$, найдите координаты остальных вершин треугольника и вектор $\overrightarrow{CA}$.

Указание. Используйте формулу определения координат вектора по координатам его начала и конца.

17. Будут ли компланарны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

а) $\vec{a}(1; 6; 5)$, $\vec{b}(3; -2; 4)$, $\vec{c}(7; -18; 2)$;

б) $\vec{a}(2; -1; 3)$, $\vec{b}(1; 4; 2)$, $\vec{c}(3; 1; -1)$?

Указание. Используйте условие компланарности векторов (равенство нулю смешанного произведения векторов).

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №15.

Действия над векторами. Использование векторов при решении математических задач.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Координаты и векторы в пространстве». Закрепить и систематизировать знания по теме.

2. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности уч-ся.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. Изучить условие заданий для практической работы.

2. Ответить на контрольные вопросы.

3. Оформить отчет о работе.

ВАРИАНТЫ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Вариант 1.

1. Даны точки А (3; -1; 2) и В (5; 1; 1). Найдите:

а) координаты вектора $\vec{AB}$; б) $|\vec{AB}|$.

2. Даны векторы $\vec{a}(-2; 3; 1)$ и $\vec{b}(4; -1; 2)$. Найдите:

а) координаты вектора $2\vec{a} - \vec{b}$;

б) при каком значении y и z вектор $\vec{c}(8; y; z)$ и вектор $\vec{a}$ коллинеарны?

3. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

а) $\vec{a}(2; -4; 1)$, $\vec{b}(3; 2; -1)$; б) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{6}$.

4. Найдите значение m , при котором векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, если $\vec{a}(2; -4; m)$, $\vec{b}(3; -1; 5)$.

5. Найдите $\cos \angle$ между векторами $\vec{a}(2; 3; -1)$ и $\vec{b}(3; -1; 2)$.

Вариант 2.

1. Даны точки А (3; -1; 2) и В (5; 1; 1). Найдите:

а) координаты вектора $\vec{BA}$; б) $|\vec{BA}|$.

2. Даны векторы $\vec{a}(-2; 3; 1)$ и $\vec{b}(4; -1; 2)$. Найдите:

а) координаты вектора $\vec{a} + 3\vec{b}$;

б) при каком значении y и z вектор $\vec{c}(8; y; z)$ и вектор $\vec{b}$ коллинеарны?

3. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

а) $\vec{a}(-2; 3; 1)$, $\vec{b}(-1; -1; 4)$; б) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0,1$.

4. Найдите значение m , при котором векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, если $\vec{a}(3; 2; -1)$, $\vec{b}(2; m; -2)$.

5. Найдите $\cos \angle$ между векторами $\vec{a}(3; 2; -1)$ и $\vec{b}(-1; 2; 3)$.

Вариант 3.

1. Даны точки А (3; -1; 5) и В (4; 1; 3). Найдите:

- а) координаты вектора $\overline{AB}$; б) $|\overline{AB}|$.
2. Даны векторы $\overline{a}$ (3; -4; 2) и $\overline{b}$ (-2; 1; 6). Найдите:
- а) координаты вектора $2\overline{a} + \overline{b}$;
- б) при каком значении x и y вектор $\overline{c}$ (x ; y ; 5) и вектор $\overline{a}$ коллинеарны?
3. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если:
- а) $\overline{a}$ (3; -1; 2), $\overline{b}$ (2; 3; -4); б) $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 3$, $\cos(\overline{a}, \overline{b}) = \frac{1}{2}$
4. Найдите значение m , при котором векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ перпендикулярны, если $\overline{a}$ (3; -1; m), $\overline{b}$ (2; 4; 3).
5. Найдите $\cos \angle$ между векторами $\overline{a}$ (-1; 2; 3) и $\overline{b}$ (2; -1; 3).

Вариант 4.

1. Даны точки А (3; -1; 5) и В (4; 1; 3). Найдите:
- а) координаты вектора $\overline{BA}$; б) $|\overline{BA}|$.
2. Даны векторы $\overline{a}$ (3; -4; 2) и $\overline{b}$ (-2; 1; 6). Найдите:
- а) координаты вектора $\overline{a} - 3\overline{b}$;
- б) при каком значении x и y вектор $\overline{c}$ (x ; y ; 5) и вектор $\overline{b}$ коллинеарны?
3. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если:
- а) $\overline{a}$ (1; -2; 4), $\overline{b}$ (2; -1; 3); б) $|\overline{a}| = 5$, $|\overline{b}| = 3$, $\cos(\overline{a}, \overline{b}) = 0,2$.
4. Найдите значение m , при котором векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ перпендикулярны, если $\overline{a}$ (3; 2; -1), $\overline{b}$ (m ; 3; 1).
5. Найдите $\cos \angle$ между векторами $\overline{a}$ (3; -1; 2) и $\overline{b}$ (3; 2; -1).

Контрольные вопросы

1. Дайте определение вектора.
2. Что мы понимаем под: а) длиной или модулем вектора, б) направлением вектора?
3. Какие векторы называются: а) равными; б) коллинеарными; в) противоположными?
4. Объясните, что мы называем: а) суммой, б) разностью двух векторов? Как их построить?
5. Какие свойства сложения векторов вы знаете?
6. Что мы понимаем под произведением вектора на число?
7. Какие свойства произведения вектора на число вы знаете?
8. Дайте определение скалярного произведения двух векторов.
9. Как построить прямоугольную систему координат: а) на плоскости; б) в пространстве?
10. По какой формуле вычисляется скалярное произведение двух векторов в координатах?
13. По какой формуле вычисляется угол между двумя векторами в координатах?

Практическая работа № 16.

Составление уравнений сферы, плоскости, прямой.

Цели:

Обучающая: формировать умение обучающихся решать задачи на данную тему;

Развивающая: развивать логическое мышление, пространственное воображение; умение сравнивать, проводить аналогию; интерес к предмету; творческие способности обучающихся.
Воспитывающая: воспитание трудолюбия, усердия в достижении цели.

Теоретический материал по данной теме

1. Общее уравнение прямой имеет вид: $Ax + By + C = 0$, где A, B, C – некоторые числа. При этом коэффициенты A, B одновременно не равны нулю, так как уравнение теряет смысл.

2. Уравнение прямой по точке и направляющему вектору:

Если известна некоторая точка $M(x_0; y_0)$, принадлежащая прямой, и направляющий вектор $\vec{P}(P_1; P_2)$ этой прямой, то уравнение данной прямой можно составить по формуле:

$$\frac{x - x_0}{P_1} = \frac{y - y_0}{P_2}$$

Иногда его называют **каноническим уравнением прямой**.

3. Общее уравнение плоскости:

Общее уравнение плоскости имеет вид $Ax + By + Cz + D = 0$, где коэффициенты A, B, C одновременно не равны нулю.

4. Уравнение плоскости по трём точкам:

Любые ли три точки пространства задают плоскость? Нет. Во-первых, точки должны быть различными. А во-вторых, они не должны лежать на одной прямой (сразу все три).

Уравнение плоскости, проходящей через

три различные точки $M_0(x_0; y_0; z_0), M_1(x_1; y_1; z_1), M_2(x_2; y_2; z_2)$, которые не лежат на одной прямой, можно составить по формуле:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \\ z - z_0 & z_1 - z_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

5. Уравнение поверхности сферы:

Сфера радиуса R с центром в начале координат представлена уравнением второй степени.
 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (R – радиус сферы)

Сфера радиуса R центр которой не совпадает с началом координат представлена другим уравнением второй степени.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

(R – радиус сферы; a, b, c – смещение центра сферы относительно центра координат)

Пример: Найти уравнение прямой, проходящей через две точки: $(-1, 2)$ и $(2, 1)$.

Решение.

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

По уравнению

полагая в нем $x_1 = -1, y_1 = 2, x_2 = 2, y_2 = 1$ (без разницы, какую точку считать первой, какую – второй), получим

$$\frac{y - 2}{1 - 2} = \frac{x + 1}{2 + 1}, \quad \text{или} \quad \frac{y - 2}{-1} = \frac{x + 1}{3},$$

после упрощений получаем окончательно искомое уравнение в виде $x + 3y - 5 = 0$.

Применение изученного материала к решению заданий

Задача 1. Составить уравнение сферы радиуса $R = 5$ с центром в начале координат.

Задача 2. Написать уравнение сферы с центром в точке $C(2; -3; 5)$ и радиусом, равным 6.

Задача 3. Найти центр и радиус сферы $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 100$.

Задача 4. Доказать, что уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$$

является уравнением сферы.

Задача 5. Составить уравнение плоскости по точкам $M_0(1; -2; 0), M_1(2; 0; -1), M_2(0; -1; 2)$.
 $5x - y + 3z - 7 = 0$

Задача 6. Составить уравнение прямой по точке $M(1; 2)$ и направляющему вектору $\vec{P}(2; 1)$
 $x - 2y + 3 = 0$

Задача 7. Составить уравнение прямой по точке $M(0; -3)$ и направляющему вектору $\vec{P}(-7; 5)$

Задача 8. Составить уравнение прямой по точке $A(0; 3)$ и направляющему вектору $\vec{j}(0; 1)$.

Задача 9. Составить уравнение прямой по двум точкам $A\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{3}\right), B(-1; 7)$.
 $AB: 28x + 15y - 77 = 0$

Ответы (один из вариантов решений):

Задача 1. Составить уравнение сферы радиуса $R = 5$ с центром в начале координат.

Решение: Непосредственной подстановкой значения радиуса в уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad \text{получим} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 25.$$

Задача 2. Написать уравнение сферы с центром в точке $C(2; -3; 5)$ и радиусом, равным 6.

Решение: Подставив значение координат точки C и значение радиуса в уравнение

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 \quad \text{получим}$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 5)^2 = 36.$$

Задача 3. Найти центр и радиус сферы $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 100$.

Решение: Сравнивая данное уравнение с уравнением сферы

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 \quad \text{видим, что}$$

$$a = -4, b = 3, c = 0, R = 10. \quad \text{Следовательно, } C(-4; 3; 0), R = 10.$$

Задача 4. Доказать, что уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$$

является уравнением сферы.

Решение: Преобразуем левую часть данного уравнения, выделив квадраты двучленов, содержащих соответственно x, y и z :

$$\begin{aligned} & x^2 - 2x + y^2 + 4y + z^2 - 6z + 5 = \\ & = (x - 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 + (z - 3)^2 - 9 + 5 = \\ & = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 - 9. \end{aligned}$$

Следовательно, данная поверхность имеет уравнение

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 9.$$

Это уравнение представляет собой уравнение сферы с центром в точке $C(1; -2; 3)$ и радиусом $R = 3$

Задача 5. Составить уравнение плоскости по точкам $M_0(1; -2; 0), M_1(2; 0; -1), M_2(0; -1; 2)$.

Решение: составим уравнение плоскости по трём точкам. Используем формулу:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2-1 & 0-1 \\ y-(-2) & 0-(-2) & -1-(-2) \\ z-0 & -1-0 & 2-0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y+2 & 2 & 1 \\ z & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Вот теперь и аналитически видно, что всё дело свелось к координатам двух векторов. Раскрываем определитель по первому столбцу, находим уравнение плоскости:

$$(x-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (y+2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + z \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(4+1)(x-1) - (2-1)(y+2) + (1+2)z = 0$$

$$5(x-1) - (y+2) + 3z = 0$$

$$5x - 5 - y - 2 + 3z = 0$$

$$5x - y + 3z - 7 = 0$$

Больше ничего упростить нельзя, записываем:

Ответ: $5x - y + 3z - 7 = 0$

Задача 6. Составить уравнение прямой по точке $M(1; 2)$ и направляющему вектору $\vec{P}(2; 1)$

$$\frac{x - x_0}{P_1} = \frac{y - y_0}{P_2}$$

Решение: Уравнение прямой составим по формуле $\frac{x - x_0}{P_1} = \frac{y - y_0}{P_2}$. В данном случае:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{1}$$

С помощью свойств пропорции избавляемся от дробей:

$$1 \cdot (x - 1) = 2 \cdot (y - 2)$$

И приводим уравнение к общему виду:

$$x - 1 = 2y - 4$$

$$x - 2y + 3 = 0$$

Ответ: $x - 2y + 3 = 0$

Задача 7. Составить уравнение прямой по точке $M(0; -3)$ и направляющему вектору $\vec{P}(-7; 5)$

Решение: Уравнение прямой составим по формуле:

$$\frac{x - x_0}{P_1} = \frac{y - y_0}{P_2}$$

$$\frac{x - 0}{-7} = \frac{y - (-3)}{5}$$

$$5x = -7(y + 3)$$

$$5x = -7y - 21$$

$$5x + 7y + 21 = 0$$

Ответ: $5x + 7y + 21 = 0$

Задача 8. Составить уравнение прямой по точке $A(0; 3)$ и направляющему вектору $\vec{j}(0; 1)$.

Решение: Используем формулу:

$$P_2 \cdot (x - x_0) = P_1 \cdot (y - y_0)$$

$$1 \cdot (x - 0) = 0 \cdot (y - 1)$$

$$x = 0$$

Ответ: $x = 0$ (ось ординат)

$$A\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{3}\right) B(-1; 7)$$

Задача 9. Составить уравнение прямой по двум точкам

Решение: Используем формулу:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$\frac{x - \frac{3}{2}}{-1 - \frac{3}{2}} = \frac{y - \frac{7}{3}}{7 - \frac{7}{3}}$$

Выполняем действия в знаменателях:

$$\frac{x - \frac{3}{2}}{-\frac{5}{2}} = \frac{y - \frac{7}{3}}{\frac{14}{3}}$$

Применяем метод пропорции:

$$\frac{14}{3} \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) = -\frac{5}{2} \cdot \left(y - \frac{7}{3}\right)$$

Именно сейчас удобно избавиться от дробных чисел. В данном случае нужно умножить обе части на 6:

$$6 \cdot \frac{14}{3} \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) = -\frac{5}{2} \cdot 6 \cdot \left(y - \frac{7}{3}\right)$$

$$28 \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) = -15 \cdot \left(y - \frac{7}{3}\right)$$

Раскрываем скобки и решаем уравнение:

$$28x - 42 = -15y + 35$$

$$28x - 42 + 15y - 35 = 0$$

Ответ: $AB: 28x + 15y - 77 = 0$

Практическая работа № 17.

Преобразование тригонометрических выражений.

Цель: Научиться преобразовывать тригонометрические выражения с использованием основных тригонометрических тождеств.

Краткие теоретические материалы

Значения тригонометрических функций некоторых углов

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—
$\operatorname{ctg} \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0

Основное тригонометрическое тождество и следствия из него:

$$1. \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$2. 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$3. 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}; \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$4. \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1; \quad \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$5. \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$6. \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

1 вариант	2 вариант
1. Вычислите:	
а) $\sin 0^0 + \cos 180^0 - \operatorname{ctg} 45^0$ б) $\sin \frac{\pi}{2} - 2 \cos \frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6}$	а) $\cos 0^0 + \sin 270^0 - \operatorname{tg} 45^0$ б) $\cos \pi - \sin \frac{\pi}{6} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$
2. Найдите значение выражения:	
а) $\sin 120^0 + \cos 300^0$ б) $\sin^2 \frac{3\pi}{4} + \cos(-\frac{5\pi}{3}) - \operatorname{tg} \frac{7\pi}{4}$	а) $\operatorname{ctg} 135^0 - \operatorname{tg} 225^0$ б) $\sin(-\frac{5\pi}{6}) + \cos \frac{4\pi}{3} - \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi}{3}$
3. Упростите выражение:	
а) $1 + \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) \cdot \cos(\pi - \alpha)$ б) $\frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$	а) $\sin(2\pi + \alpha) \cdot \sin(\pi - \alpha) + \sin^2 \alpha$ б) $\frac{1 + \operatorname{ctg}^4 \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha}$
2. Найдите значение	
$\cos \alpha$, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ $\sin \alpha = \frac{1}{2}$	$\sin \alpha$, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$
$\cos \alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{4}{3}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	$\sin \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Задание 1.1. Дано: $\sin \alpha = \frac{3}{5}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Вычислить: 1) $\cos \alpha$ 2) $\operatorname{tg} \alpha$ 3) $\operatorname{ctg} \alpha$

2. Дано: $\cos \alpha = -\frac{12}{13}, \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Вычислить: 1) $\sin \alpha$ 2) $\operatorname{tg} \alpha$ 3) $\operatorname{ctg} \alpha$

3. Дано: $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Вычислить: 1) $\cos \alpha$ 2) $\sin \alpha$ 3) $\operatorname{ctg} \alpha$

4. Дано: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{8}{15}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Вычислить: 1) $\cos \alpha$ 2) $\operatorname{tg} \alpha$ 3) $\sin \alpha$

Задание 2. Упростить выражения

1. $\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \operatorname{tg} \alpha$

2. $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

Контрольные вопросы.

- Какие функции называются тригонометрическими?
- Дайте определение функции синус; косинус; тангенс; котангенс.
- При каких углах не определен тангенс? котангенс?
- Назовите значения тригонометрических функций углов $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$.
- Какие значения может принимать синус? косинус? тангенс? котангенс?
- Определите знаки тригонометрических функций в зависимости от того, в какой четверти находится аргумент.
- Назовите основные тригонометрические тождества.

Практическая работа № 18-20.

Преобразование тригонометрических выражений с использованием формул сложения, приведения, двойного и половинного аргумента.

Цель работы:

- отработать навыки работы с таблицей значений тригонометрических функций;

2) закрепить навыки применения тригонометрических формул при вычислении значений тригонометрических функций и преобразовании выражений, содержащих тригонометрические функции.

Выполняя данную работу, студент **должен**

знать:

- основные тригонометрические тождества;
- формулы сложения тригонометрических функций;
- формулы двойного аргумента;
- формулы приведения;
- формулы суммы, разности тригонометрических функций.

уметь:

- различать тригонометрические формулы;
- применять тригонометрические формулы при преобразования и вычислении значений выражений;

Последовательность выполнения:

задания выполнять желательнo в указанном порядке.

Методические указания:

ЗАДАНИЕ 1 Перевести из градусной меры в радианную, и из радианной в градусную меру.

Использовать формулы: $n^{\circ} = \frac{\pi n}{180^{\circ}} \text{ радиан}; m \text{ радиан} = \frac{m \cdot 180^{\circ}}{\pi} \text{ градусов}$

ЗАДАНИЕ 2 Найти значение выражения.

При выполнении задания использовать тригонометрические формулы:

- основные тригонометрические тождества;
- формулы сложения тригонометрических функций;
- формулы двойного аргумента;
- формулы приведения;
- формулы суммы, разности тригонометрических функций.

ЗАДАНИЕ 3 Вычислить значение каждой из тригонометрических функций.

При выполнении задания использовать основное тригонометрическое тождество

ЗАДАНИЕ 4 Упростить выражение.

При выполнении задания использовать тригонометрические формулы:

- основные тригонометрические тождества;
- формулы сложения тригонометрических функций;
- формулы двойного аргумента;
- формулы приведения;

формулы суммы, разности тригонометрических функций.

ЗАДАНИЕ 5 Упростить выражение.

При выполнении задания использовать тригонометрические формулы приведения.

Теоретический материал:

Основные формулы тригонометрии

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha};$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Формулы сложения

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta; \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta; \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta; \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta; \\ \operatorname{tg}(\alpha - \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}; \\ \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}.\end{aligned}$$

Формулы суммы и разности

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}; \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2}\end{aligned}$$

Формулы двойного аргумента

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha; \\ \cos 2\alpha &= \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha; \quad \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha; \quad \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1; \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.\end{aligned}$$

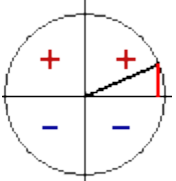
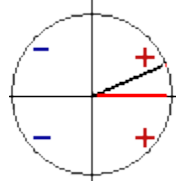
	0; 2π 0, 360°	π/6 30°	π/4 45°	π/3 60°	π/2 90°	π 180°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0
ctg α	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-

Формулы приведения

Функция в правой части равенства берется с тем же знаком, какой имеет исходная функция, если считать, что угол α является углом I четверти.

Для углов $\pi \pm \alpha$ и $2\pi \pm \alpha$ название исходной функции сохраняется. Для углов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ и $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ название исходной функции заменяется (синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс, котангенс на тангенс).

Функция		sin x	cos x	tg x	ctg x
Угол					
Градусы	Рadianы	sin φ	cos φ	tg φ	ctg φ
90° — φ	$\frac{\pi}{2} - \varphi$	cos φ	sin φ	ctg φ	tg φ
90° + φ	$\frac{\pi}{2} + \varphi$	cos φ	—sin φ	—ctg φ	—tg φ
180° — φ	π — φ	sin φ	—cos φ	—tg φ	—ctg φ
180° + φ	π + φ	—sin φ	—cos φ	tg φ	ctg φ
270° — φ	$\frac{3\pi}{2} - \varphi$	—cos φ	—sin φ	ctg φ	tg φ

$270^\circ + \varphi$	$\frac{3\pi}{2} + \varphi$	$-\cos \varphi$	$\sin \varphi$	$-\operatorname{ctg} \varphi$	$-\operatorname{tg} \varphi$
$360^\circ - \varphi$	$2\pi - \varphi$	$-\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$-\operatorname{tg} \varphi$	$-\operatorname{ctg} \varphi$
$360^\circ + \varphi$	$2\pi + \varphi$	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$\operatorname{tg} \varphi$	$\operatorname{ctg} \varphi$
					

Критерии оценивания:

Критерии оценивания:

На оценку «5» - выполнить все задания;

На оценку «4» - выполнить задания №1, №2(а,б,в); №3; № 4(в, г); №5 (б,в)

На оценку «3» - выполнить задания №1; №2(а,б,в); №3, № 4(а,б), №5(а).

Цель работы: корректировать умение по применению тригонометрических формул при преобразовании тригонометрических выражений, закрепить и систематизировать знания по теме.

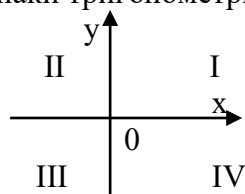
Тренировочный раздел (задания а)-нечетные варианты, б) -четные варианты)

Тема: «Основные тригонометрические формулы»

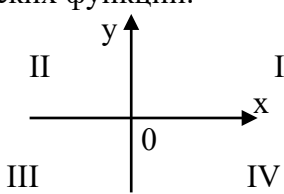
- Основное тригонометрическое тождество а) $\sin^2 \alpha + \dots = \dots$. б) из тождества следует $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \dots$
- Упростите выражения: а) $1 - \cos^2 \alpha$; б) $(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)$.
- Следствием из основного тригонометрического тождества является формула, выражающая а) $\sin \alpha$ через $\cos \alpha$: $\sin \alpha = \dots$. б) $\cos \alpha = \dots$
- Тангенсом угла α называется отношение а) $\operatorname{tg} \alpha = \dots$. б) котангенсом угла α называется $\operatorname{ctg} \alpha = \dots$
- Из определения $\operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$ следует: а) $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = \dots$. б) Соотношение между $\operatorname{tg} \alpha$ и $\cos \alpha$: $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \dots$
- Преобразуйте выражения: а) $\operatorname{tg} \alpha \cos \alpha$; б) $\frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$

Тема: «Формулы приведения»

- Знаки тригонометрических функций:



а) знаки синуса



б) знаки тангенса

- Найдите значения выражений: а) $\sin(-30^\circ)$; б) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$;
- Выразите с помощью формул приведения: а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \dots$; $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \dots$;
 $\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \dots$
 б) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \dots$; $\cos(360^\circ - \alpha) = \dots$; $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \dots$;
- Вычислите: а) $\sin 240^\circ$; б) $\operatorname{tg} 300^\circ$;

Тема: «Формулы сложения»

- Для α и β справедливы равенства: а) $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \dots$ б) $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \dots$;
- Вычислите: а) $\sin 75^\circ$; б) $\cos 105^\circ$.

3. Упростите: а) $\sin \frac{5\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7}$; б) $\frac{\operatorname{tg} 73^0 - \operatorname{tg} 13^0}{1 + \operatorname{tg} 73^0 \operatorname{tg} 13^0}$.

Тема: «Формулы двойного угла»

1. а) $\sin 2\alpha = 2 \dots$ б) $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\dots}$
 2. Упростите: а) $\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}$; б) $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2$.

Тема: «Формулы суммы и разности тригонометрических функций»

1. а) Формула суммы синусов: $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \dots$ б) Формула разности косинусов: $\cos \alpha - \cos \beta = 2 \dots$
 2. Преобразуйте в произведения: а) $\cos 27\alpha + \cos 17\alpha$; в) $\sin^2 43^0 - \sin^2 13^0$.
 3. Докажите тождества: а) $\frac{\sin 56^0 + \sin 14^0}{\cos 56^0 + \cos 14^0} = \operatorname{ctg} 55^0$; б) $\frac{\sin 3\alpha + \sin 7\alpha}{\cos 3\alpha + \cos 7\alpha} = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - 5\alpha \right)$.

Задания: Вариант 1

1. Перевести:

а) из градусной меры в радианную: 348^0 ; 66^0 ; 200^0 ;
 б) из радианной меры в градусную: $\frac{\pi}{9}$; $\frac{5\pi}{3}$; 7.

2. Найти значение выражения:

а) $3 \sin \frac{\pi}{6} + 5 \cos \frac{\pi}{3}$
 б) $\sin 69^0 \cdot \cos 21^0 + \sin 21^0 \cdot \cos 69^0$
 в) $\frac{\sin 70^0 + \sin 10^0}{\cos 70^0 - \cos 10^0}$
 *г) $2 \cos^2 15^0 \cdot \operatorname{tg} 15^0$

3. Вычислить значение каждой из тригонометрических функций, если

$$\sin \alpha = -\frac{5}{13} \quad \text{и} \quad \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi.$$

4. Упростите выражение:

а) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta$
 б) $\sin(\alpha - 30^0) + \cos(60^0 + \alpha)$
 в) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$
 *г) $\frac{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} - (\cos \alpha - \sin \alpha)^2$.

5. Используя формулы приведения:

Вычислить: а) $\sin 300^0$; б) $\sin 330^0 + \operatorname{tg} 240^0$

Упростить выражение: в) $\frac{\operatorname{tg}(\pi + \alpha) \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha)}$; * г) $\operatorname{ctg} \frac{21\pi}{4} \cdot \cos \frac{11\pi}{3}$

Вариант 2

1. Перевести:

а) из градусной меры в радианную 128^0 ; 32^0 ; 100^0 ;
 б) из радианной меры в градусную: $\frac{\pi}{7}$; $\frac{3\pi}{8}$; 4.

2. Найдите значение выражения

а) $\sin \frac{\pi}{4} + 3 \cos \frac{\pi}{4}$
 б) $\cos 69^0 \cdot \cos 21^0 - \sin 69^0 \cdot \sin 21^0$
 в) $\frac{\sin 80^0 + \sin 10^0}{\cos 80^0 + \cos 10^0}$
 *г) $\cos^2 22^0 30' - \sin^2 22^0 30'$

3. Вычислить значение каждой из тригонометрических функций, если

$$\cos \alpha = -\frac{12}{13} \text{ и } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}.$$

4. Упростите выражение:

а) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha - \sin^2 \beta$

б) $\frac{\sin(45^\circ - \alpha)}{\cos(45^\circ + \alpha)}$

в) $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$

*г) $\frac{1 - \sin^4 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot (1 + \sin^2 \alpha)}$.

5. Используя формулы приведения:

Вычислить: а) $\cos 210^\circ$

б) $\cos 315^\circ + \operatorname{ctg} 150^\circ$

Упростить выражение: в) $\frac{\sin(2\pi - \alpha) \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\cos(\pi + \alpha)}$; * г) $\sin \frac{23\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{19\pi}{6}$

Вариант 3

1. Перевести:

а) из градусной меры в радианную: 560° ; 32° ; 100° ;

б) из радианной меры в градусную: $\frac{\pi}{10}$; $\frac{9\pi}{8}$; 8.

2. Найти значение выражения:

а) $-4 \sin \frac{\pi}{4} + 3 \cos \frac{\pi}{6}$

б) $\sin 80^\circ \cdot \cos 20^\circ - \cos 80^\circ \cdot \sin 20^\circ$

в) $\frac{\cos 50^\circ - \cos 40^\circ}{\sin 50^\circ - \sin 40^\circ}$

г) $\frac{\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 35^\circ}{1 - \operatorname{tg} 10^\circ \cdot \operatorname{tg} 35^\circ}$

3. Вычислить значение каждой из тригонометрических функций, если

$$\cos \alpha = -0,8 \text{ и } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$$

4. Упростите выражение:

а) $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} \cdot (1 - \sin^2 \alpha)$

б) $\sin(\alpha - 60^\circ) + \cos(30^\circ + \alpha)$

в) $\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1}$

*г) $(\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha) \operatorname{ctg} \alpha$

5. Вычислить при помощи формул приведения:

а) $\sin 315^\circ$

б) $\cos 420^\circ + \operatorname{ctg} 225^\circ$

Упростить выражение: в) $\frac{\cos(\pi + \alpha) \cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha) \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)}$; * г) $\sin \frac{7\pi}{2} \cdot \cos \frac{25\pi}{4}$

Вариант 4

1. Перевести:

а) из градусной меры в радианную: 48° ; 626° ; 250° ;

б) из радианной меры в градусную: $\frac{2\pi}{9}$; $\frac{8\pi}{9}$; 5.

2. Найти значение выражения:

а) $\sin \frac{\pi}{4} + 3 \cos \frac{\pi}{4}$

б) $\cos 12^\circ \cdot \cos 48^\circ - \sin 12^\circ \cdot \sin 48^\circ$

в) $\frac{\sin 105^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 165^\circ - \cos 15^\circ}$

*г) $\sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12}$

3. Вычислить значение каждой из тригонометрических функций, если

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \text{ и } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

4. Упростите выражение:

- а) $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} \cdot (1 - \sin^2 \alpha)$
 б) $\cos(\alpha + 45^\circ) - \sin(45^\circ + \alpha)$
 в) $\frac{-\cos 2\alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}$
 *г) $\frac{\sin 2\alpha + \sin \alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos \alpha}$

5. Вычислить при помощи формул приведения:

- а) $\cos 510^\circ$
 б) $\operatorname{ctg} 600^\circ + \sin 480^\circ$
 *в) $\operatorname{tg} \frac{43\pi}{6} \cdot \cos \frac{28\pi}{3}$

Практическая работа № 21.

Преобразование выражений, содержащих обратные тригонометрические функции.

Цель: углубление и расширение теоретических знаний и практических умений.

Методические указания:

Начнем с вычисления значений аркфункций.

Задача №1. Вычислить а) $\arcsin 1$; б) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$; г) $\operatorname{arcctg} \sqrt{3}$.

Как видим все аргументы аркфункций положительные и табличные, а это значит, что мы можем восстановить значение углов по первой части таблицы значений тригонометрических функций для углов от 0° до 90° . Этот диапазон углов входит в область значений каждой из аркфункций, поэтому просто пользуемся таблицей, находим в ней значение тригонометрической функции и восстанавливаем, какому углу оно соответствует.

- а) $\arcsin 1 = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$
 б) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$
 в) $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$
 г) $\operatorname{arcctg} \sqrt{3} = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$

Далее будем работать с углами в радианах, т. к. это чаще используется в современной науке.

Ответ. а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{6}$; г) $\frac{\pi}{6}$.

Задача №2. Вычислить а) $\arcsin(-\frac{1}{2})$; б) $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$; в) $\operatorname{arctg}(-1)$; г) $\operatorname{arcctg}(-\frac{1}{\sqrt{3}})$.

В данном примере мы уже видим отрицательные аргументы. Типичная ошибка в данном случае – это просто вынести минус из-под функции и просто свести задачу к предыдущей. Однако это делать можно не во всех случаях. Вспомним, как в теоретической части урока мы оговаривали четность всех аркфункций. Нечетными из них являются арксинус и арктангенс, т. е. из них выносятся минус, а арккосинус и арккотангенс – это функции общего вида, для упрощения минуса в аргументе у них имеются специальные формулы. После расчета во избежание ошибок проверяем, чтобы результат входил в область значений.

- а) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
 б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \in [0; \pi]$
 в) $\operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
 г) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pi - \operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \in (0; \pi)$

Когда аргументы функций упрощены до положительной формы, выписываем из таблицы соответствующие им значения углов.

Ответ. а) $-\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{5\pi}{6}$; в) $-\frac{\pi}{4}$; г) $\frac{2\pi}{3}$.

Может возникнуть вопрос, почему бы не выписывать значение угла, соответствующего, например, $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$ сразу из таблицы? Во-первых, потому что таблицу до 180° запомнить тяжелее, чем до 90° , во-вторых, потому что отрицательных значений синуса в ней нет, а отрицательные значения тангенса дадут по таблице неверный угол. Лучше иметь универсальный подход к решению, чем запутаться в множестве различных подходов.

Задача №3. Вычислить а) $\arcsin(-2)$; б) $\arccos\frac{\pi}{3}$.

а) Типичная ошибка в данном случае – это начать выносить минус и что-то упрощать. Первое, что необходимо заметить, это то, что аргумент арксинуса не входит в область определения $-2 \notin [-1; 1]$.

Следовательно, данная запись не имеет значения, и вычислить арксинус нельзя.

б) Стандартная ошибка в данном случае заключается в том, что путают местами значения аргумента и функции и дают ответ $\frac{1}{2}$. Это неверно! Конечно, возникает мысль, что в таблице косинусу $\frac{\pi}{3}$ соответствует значение $\frac{1}{2}$, но в таком случае перепутано то, что вычисляются аркфункции не от углов, а от значений тригонометрических функций. Т. е. $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, а не $\arccos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Кроме того, поскольку мы выяснили, что $\frac{\pi}{3}$ является именно аргументом арккосинуса, то необходимо проверить, чтобы он входил в область определения. Для этого вспомним, что $\pi \approx 3,14 > 3 \Rightarrow \frac{\pi}{3} > 1$, т. е. $\frac{\pi}{3} \notin [-1; 1]$, а значит арккосинус не имеет смысла и вычислить его нельзя.

Кстати, например, выражение $\arccos\frac{\pi}{4}$ имеет смысл, т. к. $\frac{\pi}{4} \in [-1; 1]$, но поскольку значение косинуса, равное $\frac{\pi}{4}$ не является табличным, то и вычислить арккосинус с помощью таблицы нельзя.

Ответ. Выражения не имеют смысла.

В данном примере мы не рассматриваем арктангенс и арккотангенс, т. к. у них не ограничена область определения и значения функций будут для любых аргументов.

Задача №4. Вычислить $\arctg 0 \cdot \arccos\frac{1}{3}$.

По сути дела задача сводится к самой первой, просто нам необходимо отдельно вычислить значения двух функций, а потом подставить их в исходное выражение.

Аргумент арктангенса табличный $\arctg 0 = 0$ и результат принадлежит области значений. Аргумент арккосинуса не табличный, но нас это не должно пугать, т. к. чему бы не был равен арккосинус, его значение при умножении на ноль даст в результате ноль. Осталось одно важное замечание: необходимо проверить принадлежит ли аргумент арккосинуса области определения, поскольку если это не так, то все выражение не будет иметь смысла в независимости от того, что в нем присутствует умножение на ноль. Но $\frac{1}{3} \in [-1; 1]$, поэтому мы можем утверждать, что $\arccos\frac{1}{3}$ имеет смысл и в ответе получаем ноль.

Ответ. 0.

Приведем еще пример, в котором необходимо уметь вычислить одну аркфункцию, зная значение другой.

Задача №5. Вычислить $\arccos x$, если известно, что $\arctg x = \frac{\pi}{5}$.

Может показаться, что необходимо из указанного уравнения вычислить сначала значение x , а затем подставить его в искомое выражение, т. е. в арккотангенс, но этого делать не нужно.

Вспомним, по какой формуле связаны между собой указанные функции:

$$\arctg x + \operatorname{arccctg} x = \frac{\pi}{2}$$

И выразим из нее то, что нам нужно:

$$\operatorname{arccctg} x = \frac{\pi}{2} - \arctg x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}$$

Для уверенности можете проверить, что результат лежит в области значений арккотангенса.

Ответ: $\frac{3\pi}{10}$.

Преобразования аркфункций с использованием их основных свойств

Теперь перейдем к серии заданий, в которых нам придется использовать преобразования аркфункций с использованием их основных свойств.

$$\text{а) } \arcsin\left(\sin \frac{\pi}{8}\right); \text{ б) } \cos\left(\arccos \frac{1}{5}\right)$$

Задача №6. Вычислить

Для решения воспользуемся основными свойствами указанных аркфункций, только обязательно проверяя при этом соответствующие им ограничения.

$$\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{8} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

а)

$$\cos\left(\arccos \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} \in [-1; 1]$$

б)

$$\frac{\pi}{8} \quad \frac{1}{5}$$

Ответ. а) ; б) .

$$\arctg(tg 4)$$

Задача №7. Вычислить

Типичная ошибка в данном случае – это сразу же написать в ответ 4. Как мы указывали в предыдущем примере, для использования основных свойств аркфункций необходимо проверить соответствующие ограничения на их аргумент. Мы имеем дело со свойством:

$$\arctg(tgy) = y \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

при

$$4 > \frac{\pi}{2} \approx 1,5 \Rightarrow 4 \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

Но . Главное на этом этапе решения не подумать, что указанное выражение не имеет смысла и его нельзя вычислить. Ведь четверку, которая является аргументом тангенса, мы можем уменьшить при помощи вычитания периода тангенса, и это не повлияет на значение выражения. Пролодав такие действия, у нас появится шанс уменьшить аргумент так, чтобы он вошел в указанный диапазон.

$$\arctg(tg 4) = \arctg(tg(4 - \pi)) = 4 - \pi$$

$$4 - \pi < 1$$

$$\pi > 3$$

$$4 - \pi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \quad \frac{\pi}{2} \approx 1,5$$

т.

к.

поскольку

,

следовательно, , т. к. .

$$4 - \pi$$

Ответ. .

$$\sin\left(\arccos \frac{1}{4}\right)$$

Задача №8. Вычислить

В указанном примере мы имеем дело с выражением, которое похоже на основное свойство арксинуса, но только в нем присутствуют кофункции. Его надо привести к виду синус от арксинуса или косинус от арккосинуса. Поскольку преобразовывать прямые тригонометрические функции проще, чем обратные, перейдем от синуса к косинусу с помощью формулы «тригонометрической единицы».

Как мы уже знаем:

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\alpha = \arccos \frac{1}{4}$$

В нашем случае в роли . Вычислим для удобства

$$\cos \alpha = \cos \left(\arccos \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} \in [-1; 1]$$

сначала

Перед подстановкой его в формулу выясним ее знак, т. е. знак исходного синуса. Синус мы должны вычислить от значения арккосинуса, каким бы это значение ни было, мы знаем, что оно $[0; \pi]$

лежит в диапазоне . Этому диапазону соответствуют углы первой и второй четвертей, в которых синус положителен (проверьте это сами с помощью тригонометрической окружности).

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Ответ. $\frac{\sqrt{15}}{4}$.

Инструкция по выполнению работы

Работа состоит из 3 вариантов (дифференцированные). Решения всех заданий следует выполнить на отдельном листе. Необходимо записать полный ход решения всех заданий. Текст задания можно не переписывать.

Задания для самостоятельной работы:

В-1.

1. Вычислите:

а) $\arccotg \sqrt{3} - \frac{\arcsin \sqrt{2}}{2} + \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$;

б) $\arcsin \left(\cos \frac{\pi}{3} \right)$;

в) $\cotg \left(\frac{\arcsin \sqrt{3}}{2} + \arccos \left[\frac{1}{2} \right] \right)$;

г) $\cotg \left(\frac{\arccos 4}{5} \right)$.

2. Найдите множество значений функции $y = 2\arcsin x + \frac{\pi}{3}$.

В-2.

1. Вычислите:

а) $\arcsin \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \arccos 0 - \arctg \sqrt{3}$;

б) $\tg \left(\arccos \left(-\frac{5}{13} \right) \right)$;

в) $\arcsin(\sin 5)$.

2. Найдите множество значений функции $y = \frac{\pi}{4} - 3\arccos 2x$.

3.

1. Вычислите:

а) $\frac{3 \arcsin 1}{2} + 4 \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \arctg \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right)$;

б) $\cos \left(\arctg \left(-\frac{5}{12} \right) \right)$;

в) $\arccos(\cos 12)$.

2. Найдите область определения функции $y = \arctg \sqrt{x} + \frac{2 \arccos x}{2}$.

Форма контроля и критерии оценки:

Оценка «3» - выполнение 1 варианта;

Оценка «4» - выполнение 1,2 вариантов;

Оценка «5» - выполнение 1,2,3 вариантов.

Практическая работа № 22.

Решение тригонометрических уравнений.

Цель работы: закрепить навыки решения тригонометрических уравнений методами:

- метод замены переменной;
- метод решения простейших тригонометрических уравнений ;
- метод сведения путем преобразований к простейшим тригонометрическим уравнениям;
- метод решения однородных тригонометрических уравнений;

Выполняя данную работу, студент **должен**

знать :

- формулы решений простейших тригонометрических уравнений;
- основные тригонометрические тождества;
- основные методы решения уравнений

уметь :

- вычислять значения тригонометрических функций;
- выполнять действия на преобразования тригонометрических уравнений;
- применять методы решения уравнений.

Последовательность выполнения:

задания выполнять желательно в указанном порядке.

Методические указания:

ЗАДАНИЕ 1 Решите уравнения.

При решении уравнений используйте формулы простейших тригонометрических уравнений.

ЗАДАНИЕ 2 Решите уравнения методом подстановки переменной.

При решении уравнений используйте метод подстановки переменной, основное тригонометрическое тождество.

ЗАДАНИЕ 3 Решите уравнения, используя формулы тригонометрии.

При решении уравнений воспользоваться основными тригонометрическими формулами

ЗАДАНИЕ 4 Решите однородные уравнения.

- при решении однородных уравнений первой степени, выполните деление на одну из тригонометрических функций ($\sin x$ или $\cos x$);
- при решении однородных уравнений второй степени, выполните деление на одну из тригонометрических функций ($\sin^2 x$ или $\cos^2 x$);

Критерии оценивания:

Критерии оценивания:

На оценку «5» - выполнить все задания;

На оценку «4» - выполнить задания №1, №2; №3(а,б,в); № 4(а,б);

На оценку «3» - выполнить задания №1; №2; №3(а,б), № 4(а).

Задания:

1 вариант.

1. Решите уравнения:

$$a) \cos x = \frac{1}{2}$$

$$б) \sin \frac{x}{2} = -1$$

$$в) \sin 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$г) \operatorname{tg} (2x - \frac{\pi}{4}) = 1$$

2. Решите уравнения методом замены:

$$a) 2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$$

$$б) 2 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 = 0$$

3. Решите уравнения, используя формулы тригонометрии:

$$a) 5 \sin x + 3 \sin 2x = 0$$

$$б) \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$в) 2 \sin 2x \cdot \cos 2x = 1$$

$$г) \sin(\frac{\pi}{6} + x) - \sin(\frac{\pi}{6} - x) = 1$$

4. Решите однородные уравнения:

$$a) \sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$$

$$б) \sin^2 x - 3 \sin x \cdot \cos x + 2 \cos^2 x = 0$$

2 вариант

1. Решите уравнения:

$$a) \sin x = \frac{1}{2}$$

$$б) \cos \frac{x}{2} = -1$$

$$в) \cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$г) \operatorname{ctg} (2x + \frac{\pi}{4}) = -1$$

2. Решите уравнения методом замены:

$$a) 2 \cos^2 x + 5 \cos x + 2 = 0$$

$$б) -2 \sin^2 x + 5 \cos x + 4 = 0$$

3. Решите уравнения, используя формулы тригонометрии:

$$a) 7 \cos x - 4 \sin 2x = 0$$

$$б) \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$в) 2 \sin 3x \cdot \cos 3x = -\frac{1}{2}$$

$$г) \sin 2x \cdot \cos(x - \frac{\pi}{3}) - \cos 2x \cdot \sin(x - \frac{\pi}{3}) = 0$$

4. Решите однородные уравнения:

$$a) \sin x - \cos x = 0$$

$$б) 3 \sin^2 x + 4 \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 0$$

3 вариант

1. Решите уравнения:

$$a) \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$б) \sin \frac{x}{2} = 1$$

$$в) \sin 2x = -\frac{1}{2}$$

$$г) \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

2. Решите уравнения методом замены:

$$a) 2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0$$

$$б) -2 \sin^2 x - \cos x + 1 = 0$$

3. Решите уравнения, используя формулы тригонометрии:

$$a) \sin 2x - \cos x = 0$$

$$б) \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$$

$$в) \cos 2x - \cos 6x = 0$$

$$г) 4 \sin 2x - 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 5$$

4. Решите однородные уравнения:

$$a) \sqrt{3} \sin x + \cos x = 0$$

$$* б) 4 \sin^2 x - 5 \sin x \cdot \cos x - 6 \cos^2 x = 0$$

4 вариант

1. Решите уравнения:

$$a) \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$б) \cos \frac{x}{2} = -1$$

$$в) \cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$г) \operatorname{tg}\left(0,5x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$$

2. Решите уравнения методом замены:

$$a) 2 \cos^2 x + 5 \cos x + 2 = 0$$

$$б) -2 \sin^2 x + 5 \cos x + 4 = 0$$

3. Решите уравнения, используя формулы тригонометрии:

$$a) \cos^2 x - \sin^2 x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$б) \sin x + \sin 3x = 0$$

$$в) \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 17$$

$$г) \cos x - 4 \sin 2x = 0$$

4. Решите однородные уравнения:

$$a) \sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$$

$$* б) 3 \sin^2 x - 7 \sin x \cdot \cos x + 2 \cos^2 x = 0$$

Решение тригонометрических неравенств.

Цель работы: закрепить навыки решения простейших тригонометрических неравенств.

Методические указания:

ЗАДАНИЕ Решите неравенства.

При решении неравенств воспользоваться единичной окружностью.

Задания:

Вариант 1.

Решите неравенства:

а) $\sin x \leq \frac{1}{2}$;

б) $\operatorname{tg} 2x > -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Вариант 2.

Решите неравенства:

а) $\cos x \leq -\frac{1}{2}$;

б) $\operatorname{ctg} 3x < \frac{\sqrt{3}}{3}$

Вариант 3.

Решите неравенства:

а) $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\operatorname{tg} x \leq -1$

Вариант 4.

Решите неравенства:

а) $\cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\operatorname{ctg} x > \sqrt{3}$

Решите тригонометрические неравенства:

1) $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x \leq -\sqrt{3}/2$ 3) $\sin x \geq \sqrt{3}/2$ 4) $\sin x \geq \frac{1}{2}$ 5) $\cos x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\cos x \leq \sqrt{3}/2$

7) $\sin x \geq -\sqrt{3}/2$ 8) $\sin x \geq -\frac{1}{2}$ 9) $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 10) $\cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 11) $\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ 12)

$\cos x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

13) $\sin x \leq \frac{1}{2}$ 14) $\sin x \leq -\frac{1}{2}$ 15) $\cos x \geq 1$ 16) $\cos x \leq 1$ 17) $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$; 18) $\cos x \leq -\sqrt{3}/2$

19) $\sin x \geq \sqrt{3}/2$ 20) $\sin x \geq \frac{1}{2}$ 21) $\cos x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 22) $\cos x \leq \sqrt{3}/2$ 23) $\sin x \geq -\sqrt{3}/2$ 24)

$\sin x \geq -\frac{1}{2}$ 25) $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 26) $\cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 27) $\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ 28) $\cos x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 29) $\sin x \leq \frac{1}{2}$

30) $\sin x \leq -\frac{1}{2}$ 31) $\cos x \geq 1$ 32) $\cos x \leq 1$

Построение графика обратной функции. Выполнение арифметических операций над функциями. Сложная функция (композиция). Построение графиков функций, их преобразование. Взаимобратные функции. Исследование функций.

Цель: Применять на практике основополагающие понятия по теме «Функции и их свойства».

Учебные задачи:

1. Повторить основные понятия по теме «Функция».
2. Повторить свойства функции.
3. Применять свойства функции к построению графиков функций.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия

Числовой функцией называется такое соответствие между числовым множеством X и множеством R действительных чисел, при котором каждому числу из множества X сопоставляется единственное число из множества R . Множество X называют *областью определения функции*. Функции обозначают буквами f, g, h и др. Если f – функция, заданная на множестве X , то действительное число y , соответствующее числу x из множества X , часто обозначают $f(x)$ и пишут $y = f(x)$.

Переменную x при этом называют аргументом. Множество чисел вида $f(x)$ называют *областью значений функции*.

Основные свойства функции:

1. Четность и нечетность. Функция $y=f(x)$ называется четной, если для любых значений x из области определения $f(-x)=f(x)$, и называется нечетной, если $f(-x)=-f(x)$. В противном случае функция $y=f(x)$ называется функцией общего вида.
2. Монотонность. Функция $y=f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на некотором промежутке X из области определения, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции.
3. Ограниченность. Функция $y=f(x)$ называется ограниченной на некотором промежутке X из области определения, если существует число $M>0$, такое, что $|f(x)| \leq M$ для любого $x \in X$.
4. Периодичность. Функция $y=f(x)$ называется периодической с периодом $T>0$, если для любых значений x из области определения $f(x+T)=f(x-T)=f(x)$.

Элементарные преобразования графиков функций — термин, используемый в школьной

программе для обозначения линейных преобразований функции или её аргумента вида .
Применяется также для обозначений операций с использованием модуля.

Общий вид функции	Преобразования
$y = f(x + a)$	Параллельный перенос графика вдоль оси абсцисс на $ a $ единиц • вправо, если $a < 0$; • влево, если $a > 0$.
$y = f(x) + a$	Параллельный перенос графика вдоль оси ординат на $ a $ единиц • вверх, если $a > 0$, • вниз, если $a < 0$.
$y = f(-x)$	Симметричное отражение графика относительно оси ординат.
$y = -f(x)$	Симметричное отражение графика относительно оси абсцисс.
$y = f(kx)$	• При $k > 1$ — сжатие графика к оси ординат в k раз, • при $0 < k < 1$ — растяжение графика от оси ординат в $1/k$ раз.
$y = kf(x)$	• При $k > 1$ — растяжение графика от оси абсцисс в k раз, • при $0 < k < 1$ — сжатие графика к оси абсцисс в $1/k$ раз.
$y = f(x) $	• При $f(x) \geq 0$ — график остаётся без изменений, • при $f(x) < 0$ — график симметрично отражается относительно

	оси абсцисс.
$y = f(x)$	- При $x \geq 0$ — график остаётся без изменений, - при $x < 0$ — график симметрично отражается относительно оси ординат.

С помощью геометрических преобразований графика функции $f(x)$ может быть построен график любой функции вида $\pm k_1 \cdot f(\pm k_2 \cdot (x + a)) + b$, где $k_1 > 0, k_2 > 0$ - коэффициенты сжатия (при $0 < k_1 < 1, 0 < k_2 < 1$) или растяжения (при $k_1 > 1, k_2 > 1$) вдоль осей oy и ox соответственно, знаки «минус» перед коэффициентами k_1 и k_2 указывают на симметричное отображение графика относительно координатных осей, a и b определяют сдвиг относительно осей абсцисс и ординат соответственно.

Таким образом, различают три вида **геометрических преобразований графика функции**:

- Первый вид - **масштабирование** (сжатие или растяжение) вдоль осей абсцисс и ординат.

На необходимость масштабирования указывают коэффициенты k_1 и k_2 отличные от единицы, если $0 < k_1 < 1, 0 < k_2 < 1$, то происходит сжатие графика относительно oy и растяжение относительно ox , если $k_1 > 1, k_2 > 1$, то производим растяжение вдоль оси ординат и сжатие вдоль оси абсцисс.

- Второй вид - **симметричное (зеркальное) отображение относительно координатных осей**.

На необходимость этого преобразования указывают знаки «минус» перед коэффициентами k_1 (в этом случае симметрично отображаем график относительно оси ox) и k_2 (в этом случае симметрично отображаем график относительно оси oy). Если знаков «минус» нет, то этот шаг пропускается.

- Третий вид - **параллельный перенос** (сдвиг) вдоль осей ox и oy . Это преобразование производится В ПОСЛЕДНЮЮ ОЧЕРЕДЬ при наличии коэффициентов a и b , отличных от нуля. При положительном a график сдвигается влево на $|a|$ единиц, при отрицательных a – вправо на $|a|$ единиц. При положительном b график функции параллельно переносим вверх на $|b|$ единиц, при отрицательном b – вниз на $|b|$ единиц.

Задания для практического занятия:

<u>I вариант</u>	<u>II вариант</u>
1. Найти область определения функции:	
1) $y = \sqrt{x^2 - 8x + 15}$; 2) $y = \frac{3x - 2}{4x^2 - 4}$.	1) $y = \sqrt{x^2 + x - 6}$; 2) $y = \frac{5x^3 + 1}{x^2 - 9}$.
2. Установить четность или нечетность функции	
$y = \frac{12}{x} - 1$	$y = \frac{4}{x}$
3. Построить график функции:	
1) $y = x^2 + x - 6$ 2) $y = \frac{12}{x} - 1$	1) $y = x^2 - 4$ 2) $y = \frac{4}{x}$.

Задание 1.

Задан график функции $y = \sqrt{x}$. Построить график функции $y = \sqrt{x + 3} - 1$.

Задание 2. С помощью преобразования графика функции $y = x^{\frac{2}{3}}$ построить $y = -\frac{1}{2} \cdot (8x - 4)^{\frac{2}{3}} + 3$

Инструкция по выполнению практического занятия

При выполнении заданий рассмотрите примеры:

Пример 1. Найти область определения функции

5. $1) y = \frac{15}{x+6}$

6. $x + 6 \neq 0$

7. $x \neq -6$

8. $D(y) = (-\infty, -6) \cup (-6, \infty)$.

9. $2) y = \frac{x+13}{x^2-7x+12}$

10. $x^2 - 7x + 12 \neq 0$

11. $x \neq 3, x \neq 4$

12. $D(y) = (-\infty, 3) \cup (3, 4) \cup (4, \infty)$.

13. $3) y = \sqrt{x^2 - 81}$

14. $x^2 - 81 \geq 0$

15. $(x - 9)(x + 9) \geq 0$

16. $D(y) = (-\infty, -9] \cup [9, \infty)$

Пример 2. Установить четность или нечетность функции.

1) $y = x^2 + 6$

$$y(-x) = (-x)^2 + 6 = x^2 + 6 = y(x)$$

$\Rightarrow$ функция четная

2) $y = \sin x + 2x$

$$y(-x) = \sin(-x) + 2(-x) = -\sin x - 2x = -(\sin x + 2x) = -y(x)$$

$\Rightarrow$ функция нечетная

3) $y = \frac{x+2}{x^2-16}$

$$y(-x) = \frac{(-x)+2}{(-x)^2-16} = \frac{-x+2}{x^2-16}$$

$\Rightarrow$ функция общего вида

Порядок выполнения отчёта по практической работе:

1. Выполнить задания 1-3.
2. Ответить на вопросы для закрепления теоретического материала (устно).
3. Оформить отчёт по практической работе.

Образец отчёта по практической работе:

Раздел.

Тема.

Учебная цель.

Название практической работы.

Решение заданий практической работы.

Ответы на вопросы для закрепления теоретического материала.

Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию:

1. Сформулируйте определение числовой функции.
2. Что называют областью определения функции?
3. Что называют графиком функции?
4. Перечислите способы задания функции.
5. Какую функцию называют возрастающей (убывающей)?
6. Какую функцию называют четной (нечетной)?
7. Какое число называют наименьшим (наибольшим) значением функции?
8. Какая функция называется ограниченной?

Практическая работа №26.

Преобразование графиков тригонометрических функций.. Нахождение области определения и области значений.

Цель:

На конкретных примерах научиться преобразовывать графики тригонометрических функций.

Учебные задачи:

1. Выработать навык построения графика с помощью таблицы первой четверти и ранее изученных свойств тр. функций.
2. Сформировать понимание геометрического преобразования графиков.
3. Учить рассуждать и логически мыслить,

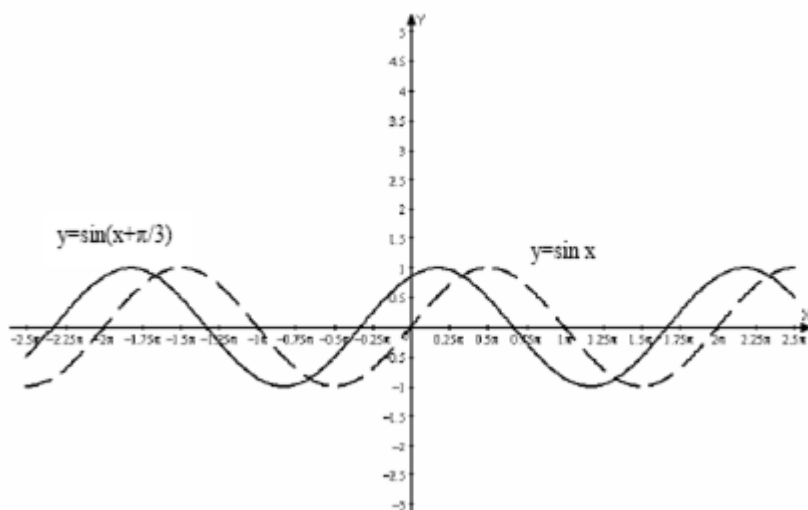
Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия

Пример1.

Построить график функции $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

Решение:

Искомый график получается из графика функции $y = \sin x$ в результате параллельного переноса вдоль оси абсцисс в отрицательном направлении на $\frac{\pi}{3}$ единиц.

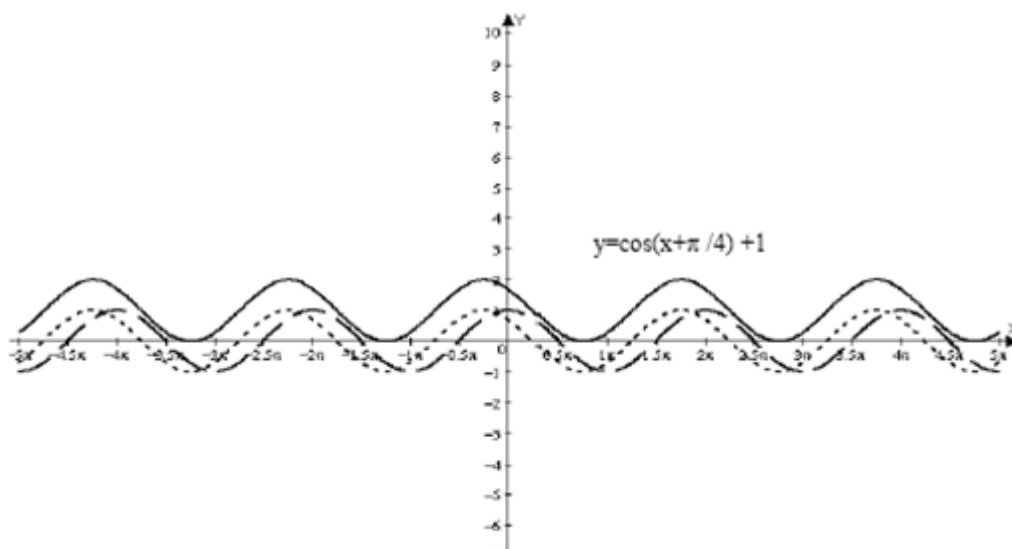


Пример2.

Построить график функции $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$

Решение:

В начале график функции $y = \cos x$ перенесем параллельно вдоль оси абсцисс на $\frac{\pi}{4}$ единиц в отрицательном направлении. Затем последний график перенесем параллельно вдоль оси ординат на 1 единицу вверх.

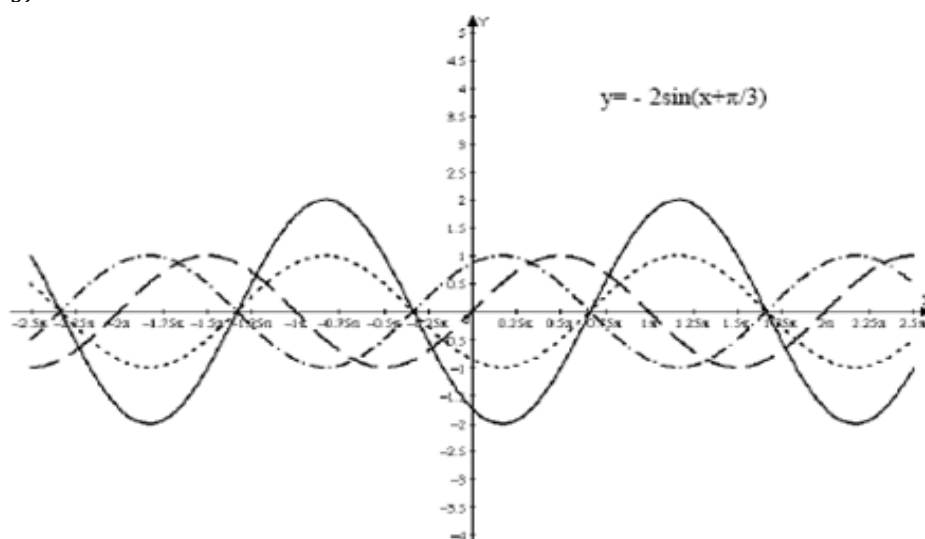


Пример 3.

Построить график функции $y = -2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

Решение:

Первый шаг – параллельный перенос графика функции $y = \sin x$ вдоль оси абсцисс на $\frac{\pi}{3}$ единиц в отрицательном направлении. Получим график $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. Затем симметрия относительно оси абсцисс. Получим график $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. Теперь растянем последний график от оси абсцисс в два раза (увеличим расстояние от каждой точки графика $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ до оси абсцисс в два раза).



Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию:

1. Как называется график функции $y = \sin x$. Какими свойствами обладает эта функция?
2. Как называется график функции $y = \cos x$. Какими свойствами обладает эта функция?
3. Как называется график функции $y = \operatorname{tg} x$. Какими свойствами обладает эта функция?
4. Как называется график функции $y = \operatorname{ctg} x$. Какими свойствами обладает эта функция?
5. Перечислите основные преобразования графиком функций.

Задания для практического занятия:

Постройте графики функций:

- 1) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
- 2) $y = \cos x - 1$
- 3) $y = \operatorname{ctg}(-x)$

$$4) y = \cos 3x$$

$$5) y = -\frac{1}{2} \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) + 1$$

$$6) y = \left| 2 \cos \left(3x + \frac{\pi}{6} \right) \right|$$

Инструкция по выполнению практического занятия

1. Познакомиться с конспектами лекций и краткой теоретической справкой
2. Ответить устно на контрольные вопросы.
3. Используя конспекты лекций, решить практические задания.

Порядок выполнения отчёта по практической работе:

1. Выполнить задания 1-3.
2. Ответить на вопросы для закрепления теоретического материала (устно).
3. Оформить отчёт по практической работе.

Образец отчёта по практической работе:

Тема.

Учебная цель.

Название практической работы.

Решение заданий практической работы.

Ответы на вопросы для закрепления теоретического материала.

Практическая работа №27.

Построение графиков взаимнообратных функций. Исследование функций.

Цели занятия:

- освоение знаний об обратных тригонометрических функциях;
- овладение умениями изображать графики обратных тригонометрических функций и описывать их свойства;
- использование знаний о характере поведения функций для описания и анализа реальных зависимостей.

Дидактическое оснащение практического занятия: методические указания по выполнению практического занятия; инструменты: линейка, карандаш, ластик.

Задание:

1. Запишите формулы, которыми задаются обратные тригонометрические функции:

2. Используя рисунки, на которых изображены графики обратных тригонометрических функций, опишите их свойства по плану:

- а) Область определения;
- б) Множество значений;
- в) Четность, нечетность;
- г) Нули функции;
- д) Промежутки знакопостоянства;
- е) Промежутки монотонности;
- ж) Экстремумы;
- з) Справедливы следующие тождества:

Рис.1

Рис. 2

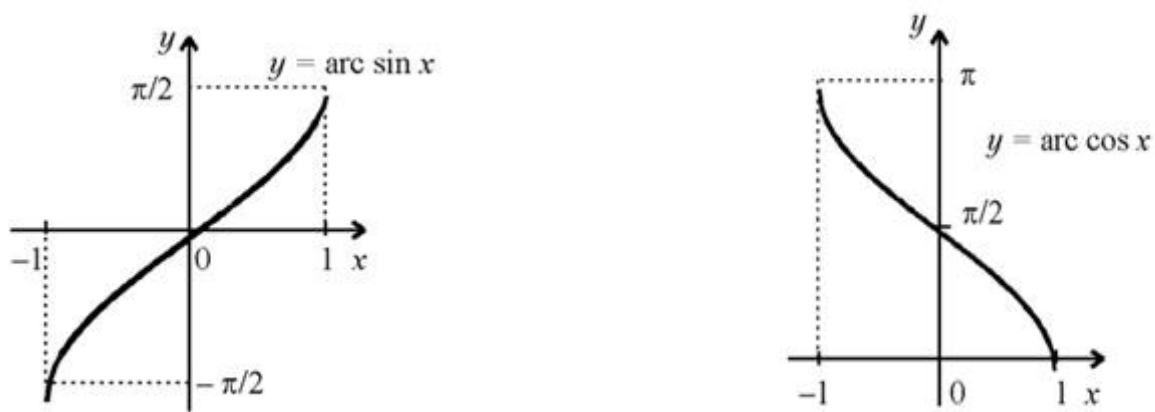


Рис.3

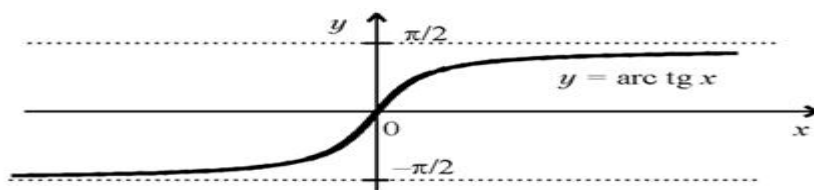
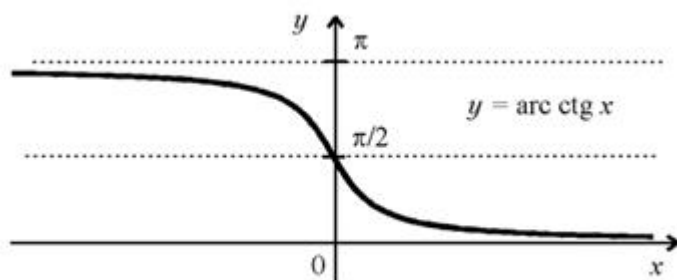


Рис. 4



Содержание отчета:

1. Постройте в тетради графики функций: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctg x$, $y = \text{arcctg } x$, учитывая, что графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.
2. Ответы по описанию свойств функций внесите в таблицу:

Таблица 1

Свойства функции	Функция			
	$y = \arcsin x$	$y = \arccos x$	$y = \arctg x$	$y = \text{arcctg } x$
Область определения				
Множество значений				
Четность, нечетность				
Периодичность				
Нули функции				
Промежутки знакопостоянства				
Промежутки монотонности				
Экстремумы				
Тождества				

Контрольные вопросы:

$$\sin(\arcsin x) \equiv x \quad (\forall x \in [-1, 1]), \quad \arcsin(\sin y) \equiv y \quad \left(\forall y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right).$$

Учитывая тождества,

$$\cos(\arccos x) \equiv x \quad (\forall x \in [-1, 1]), \quad \arccos(\cos y) \equiv y \quad (\forall y \in [0, \pi])$$

вычислите: а) $\sin(\arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{12}{13})$; б) $\operatorname{tg}(\arccos(-\frac{1}{4}))$

Литература:

1. Алимов Ш. А. и др. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (базовый и углубленный уровни). 10—11 классы. — М.: Просвещение, 2015.
2. Башмаков М. И. Математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования. — М., 2014.
3. Башмаков М. И. Математика. Сборник задач профильной направленности: учеб. пособие для студ. учреждений сред. проф. образования. — М., 2014.
4. Башмаков М. И. Математика. Задачник: учеб. пособие для студ. учреждений сред. проф. образования. — М., 2014.
5. Башмаков М. И. Математика. Электронный учеб.-метод. комплекс для студ. учреждений сред. проф. образования. — М., 2015.

Практическая работа № 28.

Решение задач на перебор вариантов, на подсчет числа размещений, перестановок, сочетаний.

Цель работы: закрепить знания и навыки в решении комбинаторных задач

Умение и навыки, которые должны приобрести студенты на занятии: вычислять сочетания, размещения, перестановки.

Ход работы.

1. Самостоятельно рассмотреть решение типовых примеров, используя основные теоретические сведения.
2. Выполнить расчеты по дидактическим карточкам-заданиям.
3. Составить отчет: оформить решение практических задач в тетради.

Приложение: дидактические карточки с заданиями 4 вариантов.

Основные теоретические сведения

Основные понятия комбинаторики

Определение.

Произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно называют

n -факториалом и пишут

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Перестановки.

Комбинация из n элементов, которые отличаются друг от друга только порядком элементов, называются перестановками.

Перестановки обозначаются символом P_n , где n - число элементов, входящих в каждую перестановку. (P - первая буква французского слова *permutation*- перестановка).

Число перестановок можно вычислить по формуле

$$P_n = n \cdot (n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

или с помощью факториала:

$$P_n = n!$$

$$0! = 1 \text{ и } 1! = 1.$$

Размещения.

Определение. Размещениями из m элементов в n в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами (хотя бы одним), либо порядком из расположения.

Размещения обозначаются символом A_m^n , где m - число всех имеющихся элементов, n - число элементов в каждой комбинации.

При этом полагают, что $n \leq m$.

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Сочетания.

Определение. Сочетаниями называются все возможные комбинации из m элементов по n , которые отличаются друг от друга по крайней мере хотя бы одним элементом (здесь m и n - натуральные числа, причем $n \leq m$).

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!n!}$$

Число сочетаний из m элементов по n обозначаются C_m^n .

В общем случае число из m элементов по n равно числу размещений из m элементов по n , деленному на число перестановок из n элементов:

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}$$

Правило суммы.

Если элемент a можно выбрать m способами, а элемент b - n способами, причем любой выбор элемента a отличен от любого выбора элемента b , то выбор "а или b " можно сделать $m + n$ способами.

Правило произведения.

Если из некоторого множества A элемент a_i можно выбрать K_A способами, а элемент b_j из множества $B - K_B$ способами, то совокупность $(a_i; b_j)$ можно образовать $K_A \cdot K_B$ способами. Правило верно и для совокупностей, состоящих из большего, чем два числа элементов.

Перестановки с повторением.

Иногда требуется переставлять предметы, некоторые из которых неотличимы друг от друга. Рассмотрим такой вариант перестановок, который называется перестановками с повторениями. Пусть имеется n_1 предметов 1-го типа, n_2 предмета 2-го, n_k предметов k -го типа и при этом $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Количество разных перестановок предметов

$$P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k) = \frac{n!}{(n_1! n_2! n_3! \dots n_k!)}$$

Размещения с повторениями.

Пусть даны элементы $a_1, a_2, \dots, a_n$ (а)

Размещением с повторениями из n элементов по k элементов называется всякая упорядоченная последовательность из k элементов, членами которой являются данные элементы. В размещении с повторениями один и тот же элемент может находиться на нескольких различных местах.

Формула для числа размещений с повторениями.

Каждый элемент может быть выбран n способами, поэтому :

$$\overline{A}_n^k = n^k, \text{ где } \overline{A}_n^k - \text{обозначение размещений с повторениями.}$$

Примеры типовых расчетов: выполняется всей группой вместе с преподавателем.

Пример 1. Сколькими способами можно расставлять на одной полке шесть различных книг?

Решение. Искомое число способов равно числу перестановок из 6 элементов, т.е.

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Пример 2. Сколько вариантов распределения на практику в три ресторана различного профиля можно составить для пяти студентов?

Решение. Искомое число вариантов равно числу размещений из 5 элементов по 3 элемента, т.е.

$$A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Пример 3. Из группы в 25 человек нужно выделить четырех для работы официантами на банкете. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Так как порядок выбранных четырех человек не имеет значения, то это можно сделать C_{25}^4 способами.

Находим по первой формуле

$$C_{25}^4 = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 12650.$$

Приложение. Дидактические карточки-задания к практической работе.

Вариант 1

1. Вычислить $\frac{6! - 4!}{3!}$
2. Упростить $\frac{(n-1)!}{(n+2)!}$
3. Вычислить $\frac{P_6 - P_5}{P_4}$
4. Вычислить A_8^4 ; C_{10}^4
5. Сколькими способами могут разместиться 5 человек вокруг круглого стола?
6. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 8, 9 так, чтобы в каждом числе не было одинаковых цифр?
7. Решить уравнение $A_x^5 = 30A_{n-2}^4$

Вариант 2

1. Вычислить $\frac{5!3!}{6!}$
2. Упростить $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$
3. Вычислить $\frac{P_4 + P_6}{P_3}$
4. Вычислить A_{13}^5 ; C_8^4
5. Сколькими способами можно расставить на полке 6 книг?
6. Сколько флажков 3 разных цветов можно составить из 5 флажков разного цвета?
7. Решить уравнение $C_x^2 = 153$

Вариант 3

1. Вычислить $\frac{5!}{3!+4!}$
2. Упростить $\frac{n!}{(n-2)!}$
3. Вычислить $\frac{P_{20}}{P_4 \cdot P_{16}}$
4. Вычислить A_{25}^2 ; C_{36}^5
5. Сколькими способами можно выбрать 3х дежурных, если в классе 30 человек?
6. Решить уравнение $C_{x-2}^2 = 21$

Вариант 4

1. Вычислить $\frac{7!+5!}{6!}$

2. Упростить $\frac{1}{(n-1)!}$

3. Вычислить $\frac{P_6 - P_5}{5!}$

4. Вычислить A_{13}^5 ; C_{10}^8

5. Сколько вариантов распределения 3х путевок в санаторий различного профиля можно составить для 5 претендентов?

6. Решить уравнение $A_x^3 = \frac{1}{2} A_x^4$

Оформить отчет.

Практическая работа №29. Бином Ньютона.

Вопросы к работе

1. Прочитать формулу бинома Ньютона.
2. Как строится треугольник Паскаля для нахождения коэффициентов бинома Ньютона?
3. По какой формуле найти s -й член бинома Ньютона?

Образцы решения заданий

Пример 1. Написать разложение по формуле бинома Ньютона и упростить $(a+b)^4$.

Решение:

$$(a+b)^4 = C_4^0 a^4 b^0 + C_4^1 a^3 b^1 + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 a^1 b^3 + C_4^4 a^0 b^4 =$$

$$\frac{4!}{0!4!} a^4 + \frac{4!}{1!3!} a^3 b + \frac{4!}{2!2!} a^2 b^2 + \frac{4!}{3!1!} a b^3 + \frac{4!}{4!0!} b^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4a b^3 + b^4.$$

Пример 2. Найти алгебраическую сумму коэффициентов многочлена относительно x , получаемого в

разложении бинома Ньютона $(3x-4)^{17}$.

Решение.

$$(3x-4)^{17} = C_{17}^0 (3x)^{17} (-4)^0 + C_{17}^1 (3x)^{16} (-4)^1 + C_{17}^2 (3x)^{15} (-4)^2 + C_{17}^3 (3x)^{14} (-4)^3 +$$

$$+ \dots + C_{17}^{17} (3x)^0 (-4)^{17}.$$

Это равенство истинно при любом значении x .

При $x = 1$ левая часть равна $(3-4)^{17} = (-1)^{17} = -1$, а в правой части получаем алгебраическую

$$C_{17}^0 3^{17} (1)^{17} + C_{17}^1 3^{16} 1^{16} (-4) + C_{17}^2 3^{15} 1^{15} (-4)^2 + \dots + C_{17}^{17} (-4)^{17} =$$

$$\text{сумму коэффициентов: } C_{17}^0 3^{17} - 4 \cdot 3^{16} C_{17}^1 + 16 \cdot 3^{15} C_{17}^2 + \dots - 4^{17} \cdot C_{17}^{17}$$

Следовательно, алгебраическая сумма коэффициентов данного многочлена равна -1 .

Пример 3. Найти 13-й член разложения бинома

$$\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2} \right)^{15}$$

Решение. Согласно формуле общего члена разложения бинома,

$$T_{13} = T_{12+1} = C_{15}^{12} \left(\sqrt[3]{3} \right)^3 \left(\sqrt{2} \right)^{12} = C_5^3 \cdot 3 \cdot 2^6 = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 3 \cdot 2^6 = 87360.$$

$$\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}\right)^{16}$$

Пример 4. Найти номер члена разложения бинома

Решение. Для общего члена разложения имеем

$$T_{m+1} = C_{16}^m (\sqrt[3]{x})^{16-m} \left(\frac{1}{x}\right)^m = C_{16}^m x^{\frac{16-m}{3}} x^{-m} = C_{16}^m x^{\frac{16-4m}{3}}.$$

Член разложения не зависит от x ; это значит, что показатель степени x равен 0, только тогда, когда

$$\frac{16-4m}{3} = 0$$

$$, 16-4m=0, m=4.$$

Итак, пятый член данного разложения не зависит от x .

Пример 5. Построить треугольник Паскаля для нахождения

коэффициентов разложения бинома Ньютона $(a+b)^7$.

Решение.

N	C_n^m
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
	$C_7^0 C_7^1 C_7^2 C_7^3 C_7^4 C_7^5 C_7^6 C_7^7$

Упражнения

1. Написать разложение по формуле бинома Ньютона и упростить:

а) $(b+\sqrt{2})^6$; Ответ: $b^6 + 6\sqrt{2}b^5 + 30b^4 + 40\sqrt{2}b^3 + 60b^2 + 24\sqrt{2}b + 8$.

б) $(a-2b)^5$; Ответ: $a^5 - 10a^4b + 40a^3b^2 - 80a^2b^3 + 80ab^4 - 32b^5$.

в) $\left(a - \frac{1}{a}\right)^{13}$; Ответ: $a^5 - 5a^3 + 10a - \frac{10}{a} + \frac{5}{a^3} - \frac{1}{a^5}$.

2. Найти пятый и девятый член разложения:

а) $(\sqrt{z}+z)^{10}$, б) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{13}$. Ответ: $C_{10}^4 Z^7$; $C_{13}^4 x^5$.

3. Найти два средних члена разложения $(a^3 - ab)^{23}$. Ответ: $C_{23}^{12} a^{45} b^{12}$; $-C_{23}^{11} a^{47} b^{11}$.

4. Найти в биномиальном разложении $(z + \frac{1}{z^3})^{16}$ член, не содержащий z . (Ответ: $T_5 = C_{16}^4$).

5. Используя треугольник Паскаля найти коэффициенты разложения:

а) $(a+b)^9$, $(a+b)^{12}$.

Индивидуальные задания

1. Разложить по формуле бинома Ньютона и упростить. Коэффициенты разложения найти, используя треугольник Паскаля:

- 1) $(\frac{1}{2}a+b)^7$;
- 2) $(1+\sqrt{2})^5$;
- 3) $(1-\sqrt{2})^5$;
- 4) $(a+2b)^6$;
- 5) $(a-\sqrt{2})^6$;
- 6) $(\sqrt{6}+\sqrt{12})^4$;
- 7) $(1+2x)^5$;
- 8) $(x+\frac{1}{2x})^8$;
- 9) $\frac{1}{27}(\sqrt{3}-\sqrt{15})^6$;
- 10) $(a-\frac{1}{a})^5$.

2. Найти два средних члена разложения:

- 1) $(a^3 + ab)^{31}$;
- 2) $(a^3 + ba)^{30}$;
- 3) $(a^2 + b)^{21}$;
- 4) $(a + b^2)^{17}$;
- 5) $(a^2 + b^3)^{13}$;
- 6) $(a^3 + b^2)^{15}$;
- 7) $(a^2 + \sqrt{b})^{19}$;
- 8) $(\sqrt{a} + b)^{17}$;
- 9) $(a + \sqrt{a})^{17}$;
- 10) $(a^2 + \sqrt{a})^{15}$.

Задание для самоконтроля

1. Найти сумму:

1) $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n$ (Ответ: 3^n);

2) $1 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n$ (Ответ: 0).

2. Доказать справедливость равенства: $C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 = C_6^4 + C_6^5 + C_6^6$.

Практическая работа № 30.

Дискретная случайная величина, закон ее распределения, числовые характеристики. Закон больших чисел.

Цель работы: Нахождение закона распределения, функции распределения и числовых характеристик случайной величины.

Содержание работы:

Основные понятия.

1 Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

2 Дискретной случайной величиной (ДСВ) называют такую величину, множество значений которой либо конечное, либо бесконечное, но счетное.

3 Непрерывной случайной величиной (НСВ) называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Множество возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно и несчетно.

4 Заданное соответствие между возможными значениями СВ и их вероятностями называется законом распределения случайной величины ; его можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически.

5 При табличном задании закона распределения дискретной случайной величины первая строка таблицы содержит возможные значения, а вторая - их вероятности. Эта таблица называется рядом распределения.

6 Ряд распределения можно представить графически, если по оси абсцисс отложить возможные значения ДСВ, а по оси ординат - соответствующие вероятности. Соединив полученные точки отрезками, получим ломаную, называемую многоугольником распределения вероятностей

7 Функцией распределения случайной величины X (обозначается $F(x)$) называется функция, определяемая соотношением $F(x) = P(X < x)$.

8 Математическое ожидание ДСВ X равно сумме произведений всех ее возможных значений на их вероятности, т.е. $M(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(x_i)$

9 Дисперсией ДСВ X ($D(X)$) называют математическое ожидание квадрата отклонения СВ от ее математического ожидания, т.е. $D(X) = M(X - M(X))^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 P(x_i)$

10 Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется арифметический корень из дисперсии, т.е. $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

Пример выполнения:

исходные данные:

Приживаемость саженцев яблонь составляет 80%. Наудачу выбирают 5 саженцев. Составить закон распределения числа прижившихся саженцев, функцию распределения, построить многоугольник распределения и график функции распределения. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа прижившихся саженцев.

Решение:

Вероятность приживаемости яблони равна 0,8.

X – случайная величина числа прижившихся яблонь из пяти саженцев:

Возможные значения: $x_1 = 0$ – ни один саженец не прижился;

$x_2 = 1$ – один саженец прижился;

$x_3 = 2$ – два прижились;

$x_4 = 3$ – три;

$x_5 = 4$ – четыре;

$x_6 = 5$ – пять саженцев прижились.

Вероятности этих значений вычислим по формуле Бернулли:

$$P(x_1) = C_5^0 p^0 q^5 = \frac{5!}{0! \cdot 5!} (0,8)^0 (0,2)^5 = 0,00032$$

$$P(x_2) = C_5^1 p^1 q^4 = \frac{5!}{1! \cdot 4!} (0,8)^1 (0,2)^4 = 5 \cdot 0,8 \cdot 0,0016 = 0,0064$$

$$P(x_3) = C_5^2 p^2 q^3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} (0,8)^2 (0,2)^3 = 10 \cdot 0,64 \cdot 0,008 = 0,0512$$

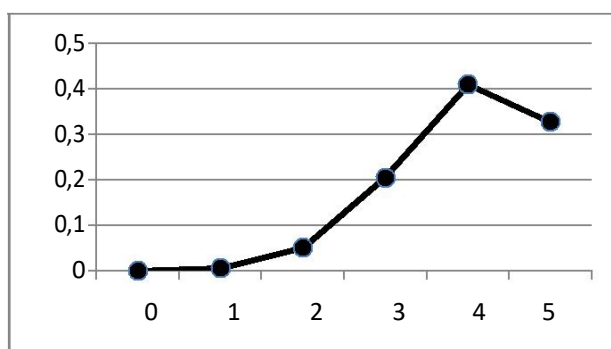
$$P(x_4) = C_5^3 p^3 q^2 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} (0,8)^3 (0,2)^2 = 10 \cdot 0,512 \cdot 0,04 = 0,2048$$

$$P(x_5) = C_5^4 p^4 q^1 = \frac{5!}{4! \cdot 1!} (0,8)^4 (0,2)^1 = 5 \cdot 0,4096 \cdot 0,2 = 0,4096 \quad P(x_6) = C_5^5 p^5 q^0 = \frac{5!}{5! \cdot 0!} (0,8)^5 (0,2)^0 = 0,32768$$

Таким образом, закон распределения случайной величины:

X	0	1	2	3	4	5
P(X)	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32768

Многоугольник распределения:



Вычислим функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0; & \text{если } x \leq 0 \\ 0,00032; & \text{если } 0 < x \leq 1 \\ 0,00032 + 0,0064 = 0,00672; & \text{если } 1 \leq x < 2 \\ 0,00032 + 0,0064 + 0,0512 = 0,05792; & \text{если } 2 \leq x < 3 \\ 0,00032 + 0,0064 + 0,0512 + 0,2048 = 0,26272; & \text{если } 3 \leq x < 4 \\ 0,00032 + 0,0064 + 0,0512 + 0,2048 + 0,4096 = 0,67232; & \text{если } 4 \leq x < 5 \\ 0,00032 + 0,0064 + 0,0512 + 0,2048 + 0,4096 + 0,32768 = 1; & \text{если } x \geq 5 \end{cases}$$

Найдем числовые характеристики случайной величины, для этого составим таблицу:

X	0	1	2	3	4	5
P(X)	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32768
X-M(X)	-4	-3	-2	-1	0	1
(X-M(X)) ²	16	9	4	1	0	1

Мат. ожидание: $M(X) = \sum_{i=1}^6 x_i P(x_i) =$
 $= 1 \cdot 0,0064 + 2 \cdot 0,0512 + 3 \cdot 0,2048 + 4 \cdot 0,4096 + 5 \cdot 0,32768 = 4$

Дисперсия: $D(X) = \sum_{i=1}^6 (x_i - M(X))^2 P(x_i) =$
 $= 16 \cdot 0,00032 + 9 \cdot 0,0064 + 4 \cdot 0,0512 + 1 \cdot 0,2048 + 0 \cdot 0,4096 + 1 \cdot 0,32768 = 0,8$

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \approx 0,89.$

Задания к практической работе.

1 В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных. Найти функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Построить полигон полученного распределения.

2 Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте. Построить полигон полученного распределения. Найти функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение

3 Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равна 0,7. Стрелок делает выстрелы до первого промаха. Составить закон распределения случайной величины X – числа патронов, выданных стрелку, если всего имеется пять патронов. Построить полигон полученного распределения. Найти функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение

4 Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа гербов при четырех подбрасываниях монеты. Построить полигон полученного распределения.

5 Два носка выбираются случайным образом из ящика, в котором находится 5 коричневых и 3 зеленых. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа коричневых носков. Построить полигон полученного распределения.

6 В ящике находится 35 кондиционных и 12 бракованных одностипных деталей. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение количества бракованных деталей среди трёх наудачу выбранных. Построить полигон полученного распределения.

7 В ящике находится 35 кондиционных и 12 бракованных одностипных деталей. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение количества кондиционных деталей среди трёх наудачу выбранных. Построить полигон полученного распределения.

8 В партии из 25 изделий 5 изделий имеют скрытый дефект. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение количества дефектных деталей среди трёх наудачу выбранных. Построить полигон полученного распределения.

9 В партии из 25 изделий 5 изделий имеют скрытый дефект. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение коли-

чества качественных деталей среди трёх наудачу выбранных. Построить полигон полученного распределения.

10 В городе имеются 4 оптовые базы. Вероятность того, что требуемого сорта товар отсутствует на этих базах, одинакова и равна 0,3. Составить закон распределения, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа баз, на которых искомый товар отсутствует в данный момент. Построить полигон полученного распределения.

11 В городе имеются 4 оптовые базы. Вероятность того, что требуемого сорта товар отсутствует на этих базах, одинакова и равна 0,3. Составить закон распределения, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа баз, на которых искомый товар имеется в данный момент. Построить полигон полученного распределения.

12 В урне 5 белых и 25 черных шаров. Вынули 3 шара. Случайная величина – число вынутых белых шаров. Составить закон распределения, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

13 Построить ряд распределения и функцию распределения числа попаданий мяча в корзину при трех бросках, если вероятность попадания равна 0,4. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

14 Из партии в 25 изделий, среди которых имеются 6 бракованных, выбраны случайным образом 3 изделия для проверки их качества. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение количества бракованных среди выбранных. Построить полигон полученного распределения.

15 В урне 5 белых и 25 черных шаров. Вынули 3 шара. Случайная величина – число вынутых черных шаров. Составить закон распределения, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

16 Построить ряд распределения и функцию распределения числа промахов при трех бросках мячом в корзину, если вероятность попадания равна 0,4. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

17 Из партии в 25 изделий, среди которых имеются 6 бракованных, выбраны случайным образом 3 изделия для проверки их качества. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и

среднее квадратическое отклонение количества качественных среди выбранных. Построить полигон полученного распределения.

18 Дискретная случайная величина – число мальчиков в семьях с 5 детьми. Предполагая равновероятными рождения мальчика и девочки найти закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение количества мальчиков. Построить полигон полученного распределения.

19 С вероятностью попадания при одном выстреле 0,7 охот-ник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более 4 выстрелов. Дискретная случайная величина – число промахов. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

20 2 стрелка делают по одному выстрелу в одну мишень, Вероятность попадания для первого стрелка при одном выстреле 0,5, для второго – 0,4. Дискретная случайная величина — число попаданий в мишень. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

21 В коробке имеются 7 карандашей, из которых 4 красные. Из этой коробки наудачу извлекаются 3 карандаша. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, равной числу красных карандашей. Построить полигон полученного распределения.

22 В коробке имеются 7 карандашей, из которых 4 красные. Из этой коробки наудачу извлекаются 3 карандаша. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, равной числу некресных карандашей. Построить полигон полученного распределения.

23 Имеются 5 ключей, из которых только один подходит к замку. Найдите закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, равной числу проб при открывании замка, если испробованный ключ в последующих опробованиях не участвует. Построить полигон полученного распределения.

24 В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных. Найти функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Построить полигон полученного распределения.

25 В коробке имеются 10 карандашей, из которых 4 синие. Из этой коробки наудачу извлекаются 3 карандаша. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, равной числу синих карандашей. Построить полигон полученного распределения.

26 Дискретная случайная величина – число девочек в семьях с 4 детьми. Предполагая равновероятными рождения мальчика и девочки найти закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение количества девочек. Построить полигон полученного распределения.

27 2 стрелка делают по одному выстрелу в одну мишень, Вероятность попадания для первого стрелка при одном выстреле 0,6, для второго – 0,7. Дискретная случайная величина — число попаданий в мишень. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

28 С вероятностью попадания при одном выстреле 0,8 охот-ник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более 4 выстрелов. Дискретная случайная величина – число промахов. Определить закон, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

29 Построить ряд распределения и функцию распределения числа промахов при трех бросках мячом в корзину, если вероятность попадания равна 0,6. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

30 Построить ряд распределения и функцию распределения числа попаданий мячом в корзину при трех бросках, если вероятность попадания равна 0,6. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

31 Построить ряд распределения и функцию распределения числа попаданий мячом в корзину при трех бросках, если вероятность попадания равна 0,7. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Построить полигон полученного распределения.

Содержание отчета: отчет по практической работе должен содержать: рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе

Контрольные вопросы: 1 Что такое случайная величина? 2 Дискретная случайная величина 3 Непрерывная случайная величина 4 Что такое закон распределения СВ? 5 Способы задания случайной величины 6 Что такое ряд распределения СВ? 7 Что называется многоугольником распределения вероятности? 8 Функция распределения случайной величины 9 Что такое математическое ожидание? 10 Что называется дисперсией случайной величины? 11 Понятие среднего квадратического отклонения СВ.

Практическая работа №31.

Задачи математической статистики. Задачи с применением вероятностных методов.

Цель:

Научиться решать практические задачи с применением вероятностных методов.

Учебные задачи:

1. Проверить навык вычисления вероятности.
2. Научить решать задачи с практическим содержанием.
3. Выработать навык применения формулы Бернулли и формулы Байеса.
4. Учить рассуждать и логически мыслить,

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, которые образуют полную группу. Пусть известны вероятности этих событий и условные вероятности $P_{B_1}(A), P_{B_2}(A), \dots, P_{B_n}(A)$ события A . В поставленных условиях вероятность события A можно найти по формуле:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)$$

формулу называют **формулой полной вероятности**;

события $B_1, B_2, \dots, B_n$ называют **гипотезами**.

Формула Байеса(Бейеса)

Пусть $H_1, H_2, \dots, H_n$ - полная группа событий и $A \subset \Omega$ – некоторое событие. Тогда по формуле для условной вероятности

$$P(H_k / A) = \frac{P(H_k \cap A)}{P(A)} \quad (1)$$

Здесь $P(H_k / A)$ – условная вероятность события (гипотезы) H_k или вероятность того, что H_k реализуется при условии, что событие A произошло.

По теореме умножения вероятностей числитель формулы (1) можно представить в виде

$$P(H_k \cap A) = P(A \cap H_k) = P(A / H_k) P(H_k)$$

Для представления знаменателя формулы (1) можно использовать **формулу полной вероятности** $P(A) = \sum_{i=1}^n P(A / H_i) P(H_i)$

Теперь из (1) можно получить формулу, называемую **формулой Байеса**:

$$P(H_k / A) = \frac{P(A / H_k) P(H_k)}{\sum P(A / H_i)}$$

По формуле Байеса исчисляется вероятность реализации гипотезы H_k при условии, что событие A произошло. Формулу Байеса еще называют **формулой вероятности гипотез**. Вероятность $P(H_k)$ называют априорной вероятностью гипотезы H_k , а вероятность $P(H_k / A)$ – апостериорной вероятностью.

Теорема. Вероятность гипотезы после испытания равна произведению вероятности гипотезы до испытания на соответствующую ей условную вероятность события, которое произошло при испытании, деленному на полную вероятность этого события.

Формула Бернулли

Схема Бернулли — это когда производится n однотипных независимых опытов, в каждом из которых может появиться интересующее нас событие A , причем известна вероятность этого события $P(A) = p$. Требуется определить вероятность того, что при проведении n испытаний событие A появится ровно k раз.

Теорема Бернулли: Вероятность наступления ровно k успехов в n независимых повторениях одного и того же испытания находится по формуле:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

где p – вероятность «успеха», $q = 1 - p$ – вероятность «неудачи» в отдельном опыте.

Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию:

1. Что называют полной группой события?
2. Дайте определение независимого события.
3. Дайте определение условной вероятности.
4. Дайте определение совместных событий.
5. Дайте определение несовместных событий.
6. Сформулируйте правило умножения вероятностей.
7. Сформулируйте правило умножения вероятностей.
8. Что называется факториалом числа n ?
9. Сформулируйте теорему умножения событий.
10. Сформулируйте теорему сложения событий.
11. Формула условной вероятности.
12. Формула полной вероятности.

Задания для практического занятия:

1. Из урны, в которой находится N белых и M черных шаров, вынимают наудачу R шара. Какова вероятность того, что R шаров окажутся черными.

Вариант	N	M	R
1)	12	7	2
2)	11	6	2
3)	10	5	3
4)	9	4	1
5)	8	3	2
6)	7	5	2
7)	6	4	2
8)	9	7	3
9)	10	5	2
10)	12	6	3

2. В ящике находится M деталей (разложены в случайном порядке). Из них стандартных деталей N . Рабочий берет наудачу три детали. Найти вероятность того, что, по крайней мере, одна из взятых деталей окажется стандартной (событие A).

Вариант	1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)	9)	10)
M	20	21	22	13	16	18	20	12	11	9
N	4	3	6	8	7	4	6	4	5	4

3. Из 10 лотерейных билетов два выигрыш. Определить вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов один выигрышный.

4. В НИИ работает 120 человек, из них 70 знают английский язык, 80 – немецкий, 50 – оба языка. Найти вероятность того, что выбранный наудачу сотрудник не знает ни одного иностранного языка.

5. Решить задачу по формуле Байеса. Из 10 учеников, которые пришли на экзамен по математике, трое подготовились отлично, четверо – хорошо, двое – удовлетворительно, один – не подготовился. В билетах 20 вопросов. Отлично подготовившиеся ученики могут ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовившиеся – на 16, удовлетворительно – на 10 и не подготовившиеся – на 5 вопросов. Каждый ученик получает наугад 3 вопроса из 20. Приглашенный первым ученик ответил на все 3 вопроса. Найти вероятность того, что он отличник.

6. Решить задачу по формуле Бернулли. Вероятность приема радиосигнала при каждой передаче равна 0,8. Найти вероятность того, что при пятикратной передаче сигнал будет принят ровно 4 раза.

7. Баскетболист забрасывает мяч в корзину с вероятностью попадания $P=0,4$. Что вероятнее: ожидать попадание трех мячей при четырех бросках или попадание четырех мячей при шести бросках?

8. На остановке останавливаются 5 маршрутов автобусов, 3 маршрута троллейбусов и 2 маршрута трамваев. В нужном направлении следует 1 автобус, 2 трамвая и 2 троллейбуса. Найти вероятность того, что первым появится нужный транспорт.

9. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 3, либо 5, либо тому и другому одновременно.

Инструкция по выполнению практического занятия

Познакомьтесь с конспектами лекций и краткой теоретической справкой. При решении практических заданий, рассмотрите примеры.

Пример 1. На контроль поступают детали с двух станков. Производительность станков не одинакова. На первом станке изготавливают 60% всех деталей, на втором – 40%. Вероятность брака на первом станке 0.02 на втором – 0.04. Найти вероятность того, что поступившая на контроль деталь бракованная.

Решение. Событие A – поступившая на контроль деталь бракованная.

B_1 и B_2 – события означающие, что деталь сделана соответственно на первом и втором станке.

Тогда по условию задачи:

$$\begin{aligned} P(B_1) &= \frac{60}{100} = 0.6 & P(B_2) &= \frac{40}{100} = 0.4 \\ P_{B_1}(A) &= 0.02 & P_{B_2}(A) &= 0.04. \end{aligned}$$

Искомая вероятность:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = 0.6 \cdot 0.02 + 0.4 \cdot 0.04 = 0.028.$$

Пример 2. В условиях задачи 1, проверенная деталь оказалась бракованной. Определить вероятность того, что она была изготовлена на первом станке.

Решение. Искомая вероятность $P_A(B_1)$ – вероятность, что деталь изготовлена на первом станке, при условии что уже известно, что деталь бракованная.

По формуле Байеса:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}.$$

$$\text{Из примера 1: } P(B_1) = \frac{60}{100} = 0.6; \quad P(B_2) = \frac{40}{100} = 0.4; \quad P(A) = 0.028.$$

Искомая вероятность:

$$P_A(B_1) = \frac{0.6 \cdot 0.02}{0.028} \approx 0.43.$$

Пример 3. Монета бросается 10 раз. Какова вероятность двукратного появления герба?

Решение. Число опытов $n=10$, $m=2$. Событие A – «успех» – выпадение герба. Тогда $p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$.

$$P_{10}(2) = C_{10}^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{45}{1024} \approx 0,04395.$$

Ответ: 0,04395.

Порядок выполнения отчёта по практической работе:

1. Решите задачи.
2. Ответить на вопросы для закрепления теоретического материала (устно).
3. Оформить отчёт по практической работе.

Образец отчёта по практической работе:

Тема.

Учебная цель.

Название практической работы.

Решение заданий практической работы.

Ответы на вопросы для закрепления теоретического материала.

Практическая работа №32.

Нахождение элементов параллелепипеда и призмы.

Цели:

1. закрепить понятия призма, параллелепипед, прямоугольный параллелепипед, линейные размеры, диагональ, площадь боковой и полной поверхности призмы;
2. формировать умения в нахождении призмы среди других пространственных фигур, ее элементов;
3. продолжить формирование умений в применении формул для нахождения площади боковой и полной поверхности призмы в решении практических задач;
4. продолжить формирование интереса к предметным знаниям и приложению знаний в решении практических задач;

Методические указания

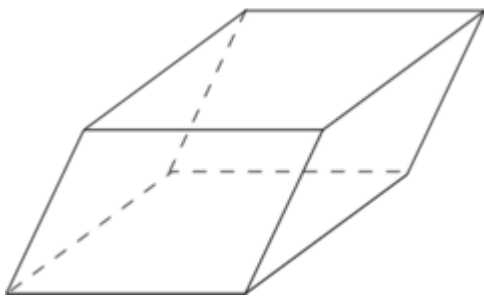
1. Изучить теоретические знания о призме, используя лекционный материал и материал, предложенный в работе.
2. Ответить на контрольные вопросы.
3. Изучить ход практической работы, ответить на контрольные вопросы.
4. Выполнить самостоятельную работу предложенного варианта с оформлением по образцу.

Теоретические знания

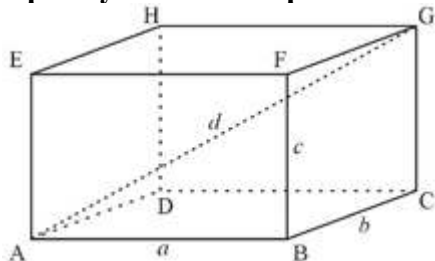
Призма — многогранник, две грани которого являются многоугольниками, лежащими в параллельных плоскостях, а остальные грани — параллелограммами, имеющими общие стороны с этими многоугольниками.

Виды призм.

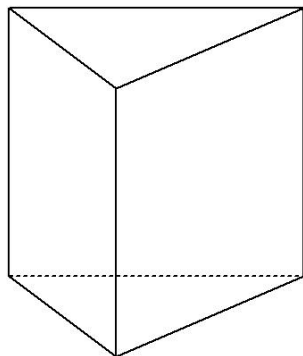
- Призма, основанием которой является параллелограмм, называется **параллелепипедом**.



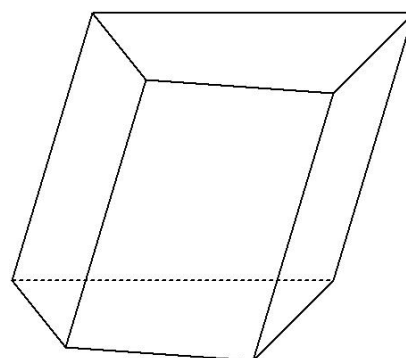
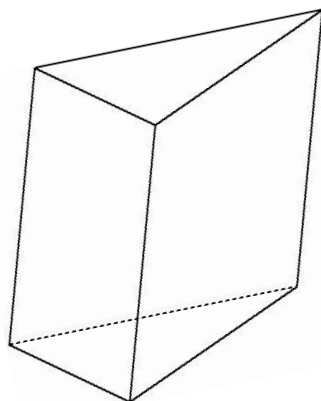
- **Прямоугольный параллелепипед**-это параллелепипед, все грани которого прямоугольники



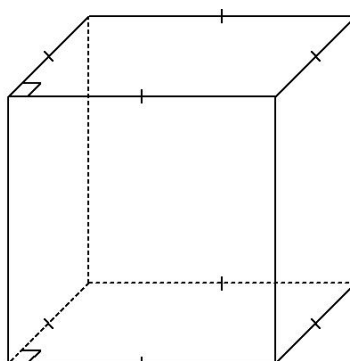
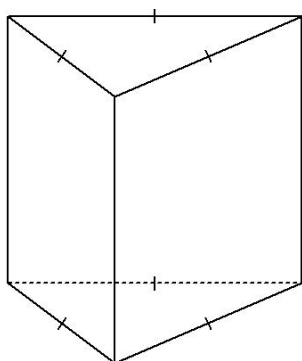
- **Прямой параллелепипед**-это параллелепипед, у которого 4 боковые грани прямоугольники
- **Куб**-это прямоугольный параллелепипед, все грани которого квадраты.
- **Прямая призма** - это призма, у которой боковые ребра перпендикулярны плоскости основания.



- Другие призмы называются **наклонными**.



- **Правильная призма** - это прямая призма, основанием которой является правильный многоугольник. Боковые грани правильной призмы - равные прямоугольники.



- В основании призмы может быть многогранник с любым количеством сторон. От количества сторон зависит название призмы.

Свойства призмы:

- Основания призмы являются равными многоугольниками.
- Боковые грани призмы являются параллелограммами.
- Боковые ребра призмы параллельны и равны.

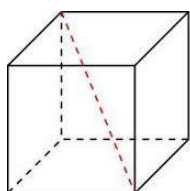
Площадь боковой поверхности прямой призмы

$$S_{б.п.} = P \cdot H$$

где P — периметр основания призмы (сумма всех сторон основания), H — высота призмы. Высота прямой призмы совпадает с боковым ребром.

Площадь полной поверхности призмы равна сумме площади её боковой поверхности и удвоенной площади основания

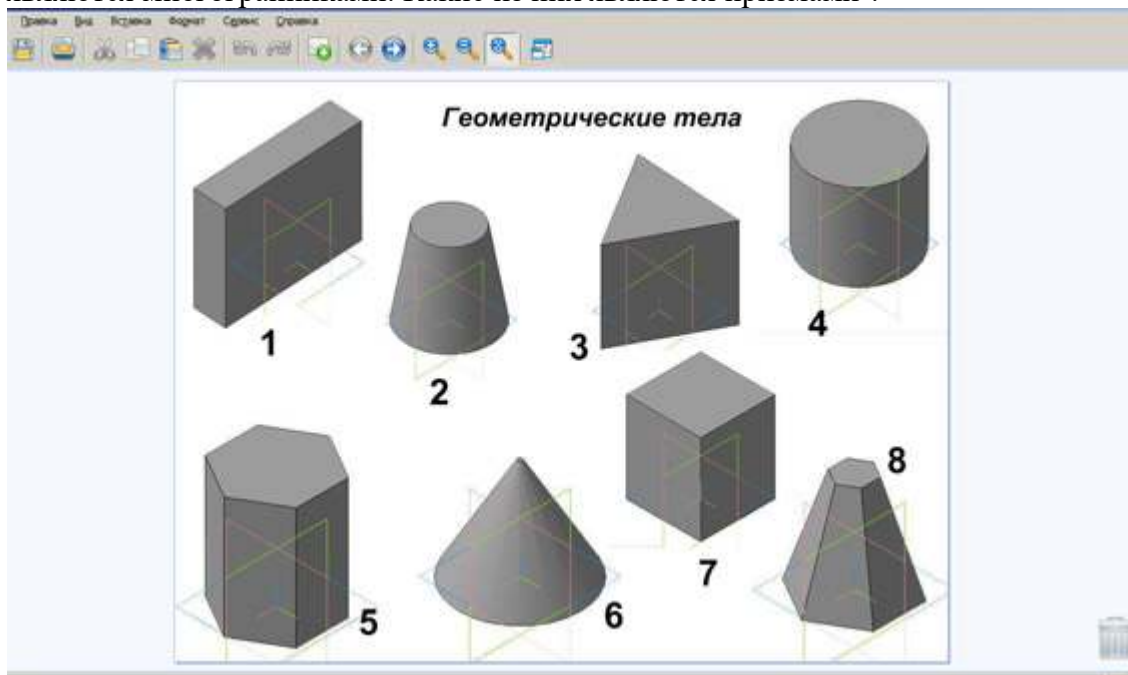
$$S_{п.п.} = P \cdot H + 2 \cdot S_{осн}$$



Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его линейных размеров: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Контрольные вопросы

1. Среди изображенных тел, выберите те, которые являются многогранниками. Какие из них являются призмами ?



- Покажите для призмы :
а) вершины б) основания в) грани г) ребра
- Какие многогранники лежат в основании призмы? В каких плоскостях лежат основания призм?
- Какими отрезками являются боковые ребра призмы?
- Какими многоугольниками являются все грани параллелепипеда?
- Сколько измерений у прямоугольного параллелепипеда?
- Какие многоугольники являются основаниями и боковой гранью прямоугольной призмы (четырехугольной, пятиугольной)? Сколько граней у треугольной (четырехугольной, пятиугольной) призмы ?

8. Из каких поверхностей состоит площадь боковой поверхности призмы, площадь полной поверхности призмы?
9. Запишите формулу для нахождения площади боковой и полной поверхности прямоугольного параллелепипеда.
10. Запишите формулу для нахождения диагонали прямоугольного параллелепипеда.

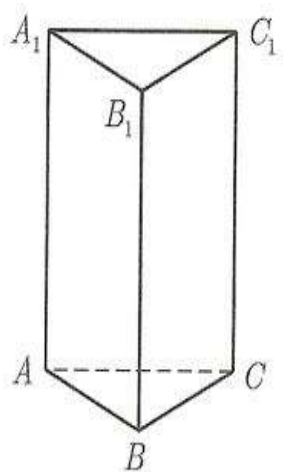
Задание к практической работе: по данным моделям найти площадь боковой, полной поверхности призмы

Пример: Найти площадь боковой, полной поверхности призмы.

Ход работы

1. Для нахождения площади боковой поверхности призмы нужно измерить линейкой следующие элементы призмы: стороны основания, высоту. Подставить значения в формулу для нахождения площади (если призма прямая)
 2. Для нахождения площади полной поверхности призмы нужно найти площадь основания призмы (площадь треугольника, прямоугольника, ромба)
- Площадь полной поверхности призмы находится как сумма площадей боковой поверхности и двух оснований.

Оформление работы:



Дано: $ABCC_1B_1A_1$ треугольная призма, прямая, правильная

$AB=BC=AC = 5$ см, $H = 10$ см

Найти: $S_{б.п.}$, $S_{п.п.}$

Решение: $S_{б.п.} = P \cdot H$

$P=5+5+5=15$ (см), $H=10$ см

$S_{б.п.} = 15 \cdot 10 = 150$ (см²)

Формула Герона позволяет вычислить площадь треугольника (S) по его сторонам a , b , c :

$S_{осн} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

где p — полупериметр треугольника:

$p = (a+b+c):2$

$p = 15:2 = 7,5$ (см)

$S_{п.п.} = P \cdot H + 2 \cdot S_{осн} = 150 + 2 \cdot 7,7 = 164,4$ (см²)

Решение задачи: Коллекционер заказал аквариум, имеющий форму правильной шестиугольной призмы. Сколько квадратных метров стекла необходимо для изготовления аквариума, если сторона основания 0,5 м, а высота 1,2 м? Ответ округлите до сотых.

практическое 1. Сначала найдём площадь основания.

Так как основание — правильный шестиугольник, то площадь основания

найдем по формуле: $S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$ $S = \frac{3 \cdot 0,5^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{3 \cdot 0,25 \cdot 1,732}{2} = 0,6495$ (м²)

характера

ктер

а

2. Найдём площадь боковой поверхности:

$0,5 \cdot 1,2 \cdot 6 = 3,6$ (м²)

3. Площадь полной поверхности найдём по формуле:

$S = S_{бок} + S_{осн} = 3,6 + 2 \cdot 0,6495 = 4,899$ (м²)

Ответ: 4,90 м²

Контрольные вопросы

1. Какие измерения нужны для вычисления площади боковой и полной поверхности призмы?
2. Как вычислить периметр основания призмы?
3. Запишите формулы для вычисления площади боковой и полной поверхности призмы?
4. Какие изменения произойдут при вычислении площади боковой и полной поверхности правильной четырехугольной, пятиугольной, шестиугольной призмы.

Задания для самостоятельной работы:

Вариант 1

1. Сколько ребер у шестиугольной призмы?

Ответ: а)18, б)24, в)12.

2. Выберите верное утверждение.

- а) призма называется правильной, если ее основания - правильные многоугольники;
- б) у треугольной призмы две диагонали;
- в) высота призмы равна ее боковому ребру;

3.Задача Найдите площадь боковой и полной поверхности прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны 2м, 3м, 5м.

4. Задача. Коллекционер заказал аквариум, имеющий форму правильной четырехугольной призмы. Сколько квадратных метров стекла необходимо для изготовления аквариума, если сторона основания 70 см, а высота 60 см?

Вариант 2

1. Сколько граней у шестиугольной призмы?

Ответ: а)6, б)8, в)10

2. Выберите верное утверждение.

- а) площадь полной поверхности призмы называется сумма площадей ее боковых граней и основания;
- б) у треугольной призмы нет диагоналей;
- в) высота прямой призмы равна ее боковому ребру;

3.Задача. Найдите площадь боковой и полной поверхности прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны 3см, 4см, 5см.

4. Задача Необходимо изготовить короб с крышкой для хранения картофеля в форме прямой призмы высотой 0,7 м. В основании призмы лежит прямоугольник со сторонами 0,4 м и 0,6 м. Сколько фанеры понадобится для изготовления короба?

Вариант 3(задания повышенного уровня)

1. Сколько граней у четырехугольной призмы?

Ответ: а)6, б)8, в)10

2. Выберите верное утверждение.

- а) У n – угольной призмы $2n$ ребер;
- б) площадь полной поверхности призмы называется сумма площадей ее боковых граней;
- в) у треугольной призмы три диагонали;

3.Задача. Сколько необходимо купить листов 8 – волнового шифера размером 1750*1130 мм на покрытие крыши здания длиной 10 м. Фронтон имеет форму равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой 10 м и катетом 7 м.

4. Задача. Нужно оклеить обоями типа «рогожка», комнату, длина которой 6м, ширина 4м, высота 3м, площадь окон и дверей составляет $\frac{1}{5}$ всей площади стен. Сколько нужно рулонов обоев для оклейки комнаты, если длина рулона 12 м, а ширина 50 см?

Формы контроля

Своевременное выполнение.

Оформление работы.

Правильное использование формул для вычисления, отсутствие вычислительных ошибок.

Литература

1. Башмаков М.И. Математика. Учебное пособие для общеобразовательных учреждений нач. и сред. проф. образования

Интернет-ресурсы

1. <http://fcior.edu.ru/> «Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов». Модули: Правильные многогранники. [Призма](#). [Параллелепипед](#).
2. ru.wikipedia.org [Правильный многогранник](#). [Призма](#). [Параллелепипед](#).

Практическая работа №33.

Нахождение элементов пирамиды.

Цель: закрепление понятий: пирамида, объем, площадь боковой и полной поверхности пирамиды.

Оборудование: модели пирамид, таблица с формулами $S_{б.п.}$, $S_{п.п.}$, линейки, карандаши, калькулятор, карточки вопрос - ответ (из истории пирамид), плакат с изображением египетских пирамид, диск «Энциклопедия», тесты приложение

Продолжительность: 2 часа

Порядок выполнения работы :

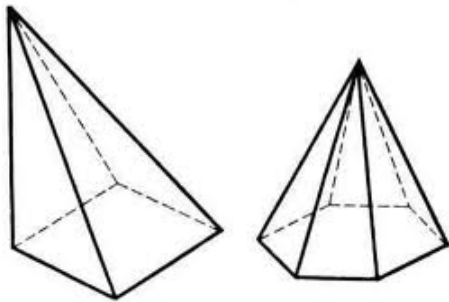
1. Ознакомиться с указаниями к выполнению практической работы
2. Сделать краткий конспект теоретического материала в рабочих тетрадях (основные понятия, определения, формулы, примеры)
3. Изучить условие заданий для практической работы.
4. Оформить отчет о работе.

Теоретический материал

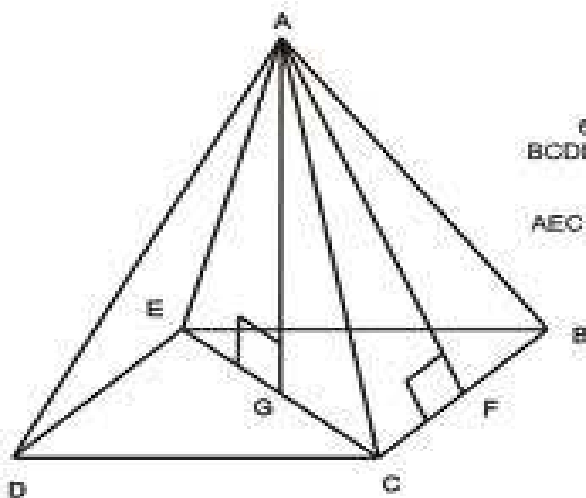
Пирами́да — многогранник, основание которого — многоугольник, а остальные грани — треугольники, имеющие общую вершину. По числу углов основания различают пирамиды треугольные, четырёхугольные и т. д.

наклонная

прямая



Элементы пирамиды



A – вершина пирамиды;
AB, AC, AD, AE – ребра пирамиды;
ADE, AEB, ABC, ACD – боковые грани пирамиды;
BCDE – основание пирамиды;
AG – высота;
AF – апофема;
AEC – диагональное сечение.

апофема — высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины [ℓ];
боковые грани — треугольники, сходящиеся в вершине пирамиды;

боковые ребра — общие стороны боковых граней;

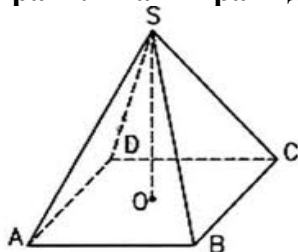
вершина пирамиды — точка, соединяющая боковые рёбра и не лежащая в плоскости основания;

высота — отрезок перпендикуляра, проведённого через вершину пирамиды к плоскости её основания (концами этого отрезка являются вершина пирамиды и основание перпендикуляра) (H);

диагональное сечение пирамиды — сечение пирамиды, проходящее через вершину и диагональ основания;

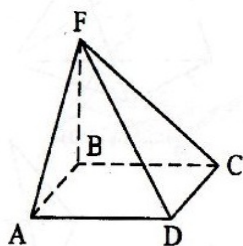
основание — многоугольник, которому не принадлежит вершина пирамиды.

Правильная пирамида



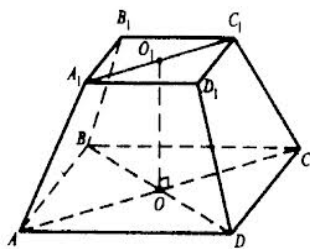
Пирамида называется правильной, если основанием её является правильный многоугольник, а вершина проецируется в центр основания. Тогда она обладает такими свойствами: боковые ребра правильной пирамиды равны; в правильной пирамиде все боковые грани — равные равнобедренные треугольники; в любую правильную пирамиду можно как вписать, так и описать около неё сферу;

Прямоугольная пирамида



Пирамида называется прямоугольной, если одно из боковых рёбер пирамиды перпендикулярно основанию. В данном случае, это ребро и является высотой пирамиды.

Усечённая пирамида



Усечённой пирамидой называется многогранник, заключённый между основанием пирамиды и секущей плоскостью, параллельной её основанию.

Боковая поверхность — это сумма площадей боковых граней.

Для нахождения боковой поверхности в правильной пирамиде можно использовать формулу:

$$S_{б.п.} = 1/2 \cdot P \cdot \ell$$

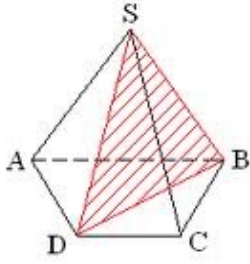
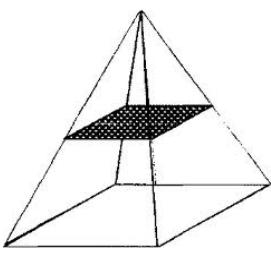
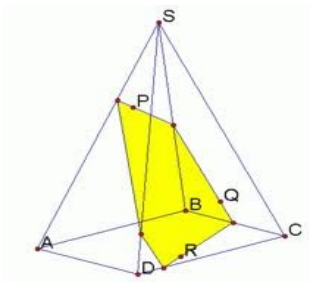
Полная поверхность — это сумма площади боковой поверхности и площади основания.

Для нахождения полной поверхности в правильной пирамиде можно использовать формулу:

$$S_{п.п.} = 1/2 \cdot P \cdot \ell + S_{осн.}$$

Объем пирамиды (любой) может быть вычислен по формуле : $V = 1/3 \cdot S_{\text{осн.}} \cdot H$

Сечения пирамиды:

		
диагональное сечение	сечение плоскостью, параллельной основанию	сечение плоскостью проходящей под углом к основанию

2. Историческая справка:

Беседа «А знаете ли вы?» (можно использовать диск «Энциклопедия», восьмое чудо света, или «Энциклопедию для детей» Москва 1998г., видео «Секреты Египетских пирамид»)

Вопросы: 1. В каком месте земного шара находятся эти пирамиды?

Ответ: Египет-государство в Северо-Восточной Африке. 98% территории – это пустые районы, 3% - дельта и долина реки Нил. Население 60,9 млн. человек; 98%-египтяне; официальный язык-арабский.

2. Для чего строили пирамиды?

Ответ: Пирамиды строили для того, чтобы охранять тела умерших фараонов и их сокровища.

3. Почему правителя называли «фараон»?

Ответ: Египтяне считали, что их правитель происходит от бога Солнца, и для обычного человека считалось неуважительным называть его по имени. Они называли его «фараон», что значило «большой дом».

4. Какая пирамида самая высокая?

Ответ: Пирамида, построенная для фараона Хуфу, ее высота первоначально достигала 143м. Ее стороны основания точно ориентированы на север, юг, восток и запад.

Для постройки потребовалось 2млн.300 тыс. каменных блоков, каждый из которых весил 2тонны. На ее строительстве были заняты 100 000 людей в течении 20 лет.

5. Какая пирамида самая древняя?

Ответ: Пирамида Джосера является первой постройкой в мире из каменных блоков. Ее возраст 4600лет.

3. Практическая часть: выполняют практическую работу в парах: на каждую парту выдается модель пирамиды (треугольная, четырехугольная).

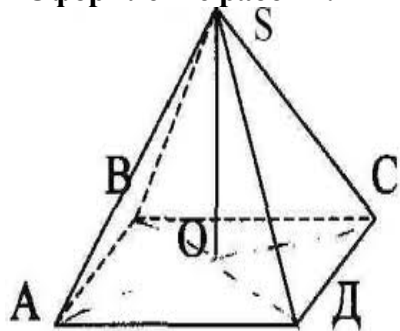
1.Задание к практической работе: по данным вам моделям найти площадь боковой, полной поверхности, объем пирамиды. Выполнить тесты.

Пример: Найти площадь боковой, полной поверхности, объем пирамиды.

Ход работы:

1. Для нахождения площади боковой поверхности пирамиды нужно измерить линейкой следующие элементы: апофему, стороны основания, высоту. Подставить значения в формулу для нахождения площади (если пирамида правильная). Если пирамида наклонная, то боковую поверхность находим из суммы площадей граней.
2. Для нахождения площади полной поверхности пирамиды нужно найти площадь основания пирамиды (площадь треугольника, прямоугольника, ромба)
3. Площадь полной поверхности пирамиды находится как сумма площадей боковой поверхности и основания.
4. Для нахождения объема нужно знать высоту пирамиды и площадь основания.

Оформление работы:



Дано: SABCD – пирамида, AB=3см, BC= 6см, пирамида неправильная, H=10см, $\ell_1=10,5$ см., $\ell_2=10,2$ см

Найти: $S_{б.п.}$; $S_{п.п.}$; V

Решение: т.к. пирамида неправильная, то $S_{б.п.}$ находят как сумму площадей ее боковых граней, т.е. площадей треугольников.

$S_1 = 1/2 \cdot \ell_1 \cdot AB = 1/2 \cdot 10,5 \cdot 3 = 15,75(\text{см}^2)$ - это площадь одной грани, а их две одинаковых, т.е

$$S_{1,2} = 15,75 \cdot 2 = 31,5(\text{см}^2)$$

$$S_3 = 1/2 \cdot \ell_2 \cdot BC = 1/2 \cdot 10,2 \cdot 6 = 30,6(\text{см}^2), S_{3,4} = 2 \cdot 30,6 = 61,2(\text{см}^2)$$

$$S_{б.п.} = 31,5 + 61,2 = 92,7(\text{см}^2)$$

$$S_{осн.} = AB \cdot BC = 3 \cdot 6 = 18(\text{см}^2), S_{п.п.} = S_{б.п.} + S_{осн.} = 92,7 + 18 = 110,7(\text{см}^2)$$

(если пирамида правильная, то пользуемся формулами)

$V = 1/3 \cdot S_{осн.} \cdot H = 1/3 \cdot 18 \cdot 10 = 60(\text{см}^3)$ – формула объема справедлива для любой пирамиды.

5. Выполняют тесты, состоящие из двух вопросов и двух задач.

Задания для самостоятельной работы:

Вариант 1

1. Сколько ребер у шестиугольной пирамиды:

Ответ: а)6; б)12; в)18; г)24; д)8

2. Какое наименьшее число граней может иметь пирамида:

Ответ: а)5; б)12; в)10; г)6; д)4

3. Выберите верное утверждение:

а) Многогранник, составленный из n-треугольников, называется пирамидой;

б) пирамида называется правильной, если ее основание – правильный многоугольник;

в) высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется апофемой;

4. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 4см, а длина диагонали основания - $6\sqrt{2}$ см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Ответ: а)96см²; б)156см²; в)36см²; г)60см²; д)150см²

Вариант 2

1. Сколько граней у шестиугольной пирамиды:

Ответ: а)6; б)7; в)8; г)10; д)12

2. Какое наименьшее число ребер может иметь пирамида:

Ответ: а)6; б)5; в)4; г)7; д)8

3. Выберите верное утверждение:

а) Высота пирамиды называется высотой грани;

б) площадь боковой поверхности пирамиды равна произведению периметра основания на высоту;

в) пирамида называется правильной, если ее основание – правильный многоугольник;

4. Высота правильной треугольной пирамиды равна 12см, сторона основания 15см. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

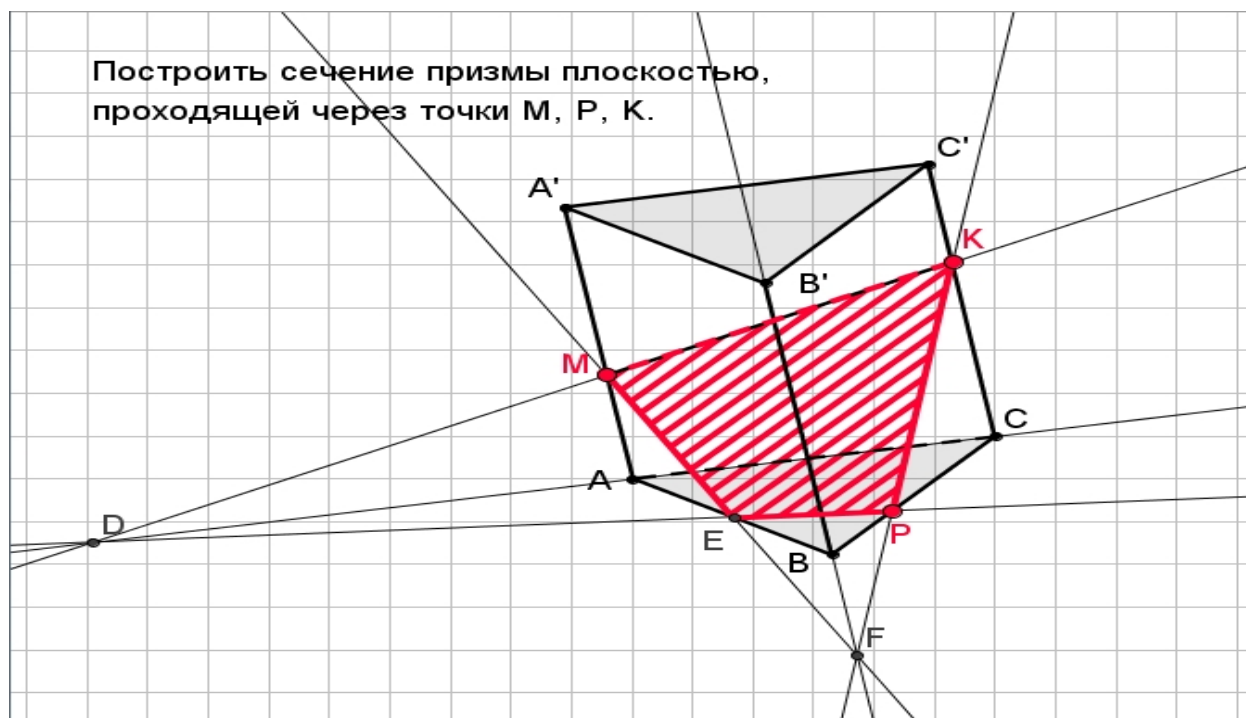
Практическая работа №34.

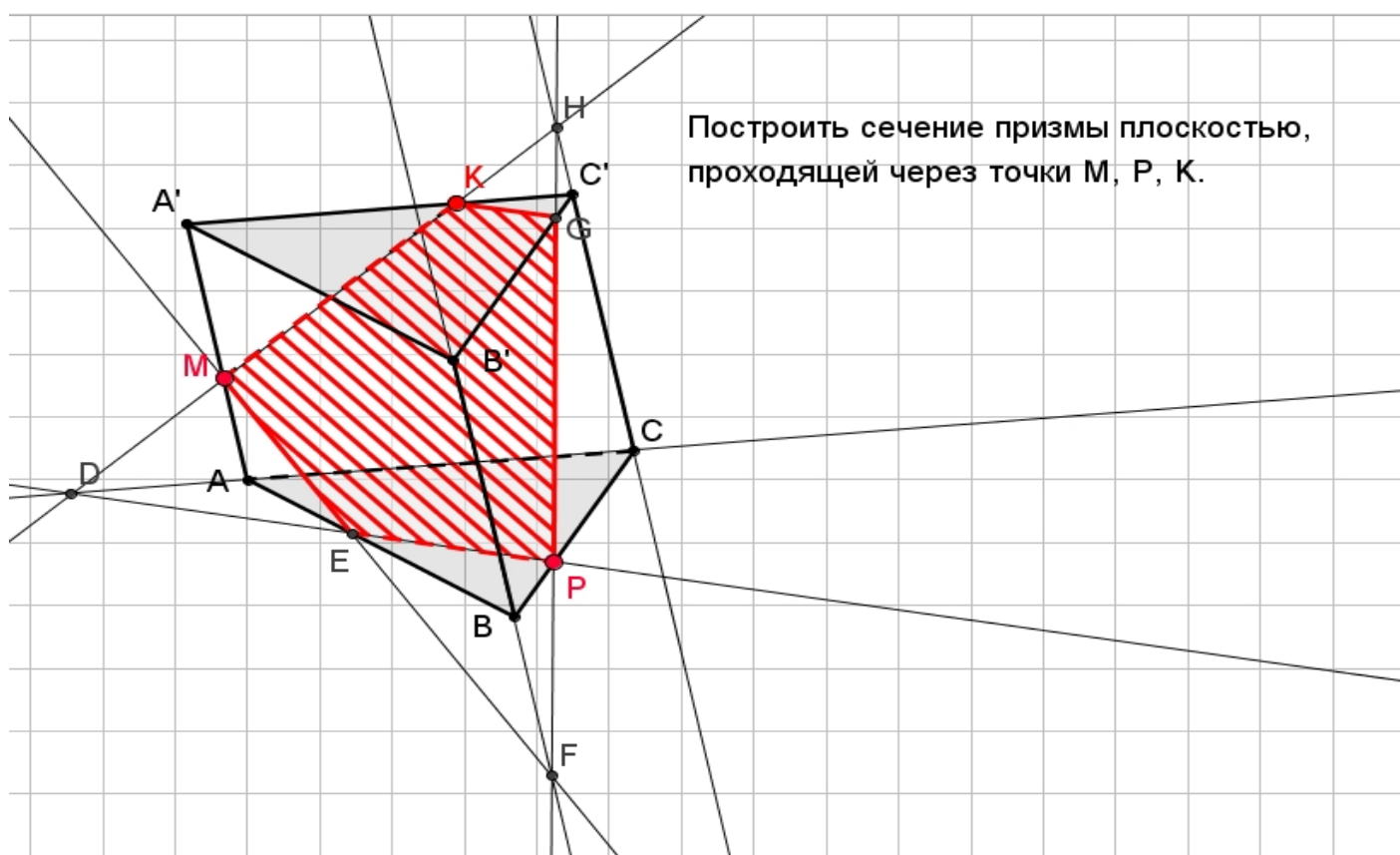
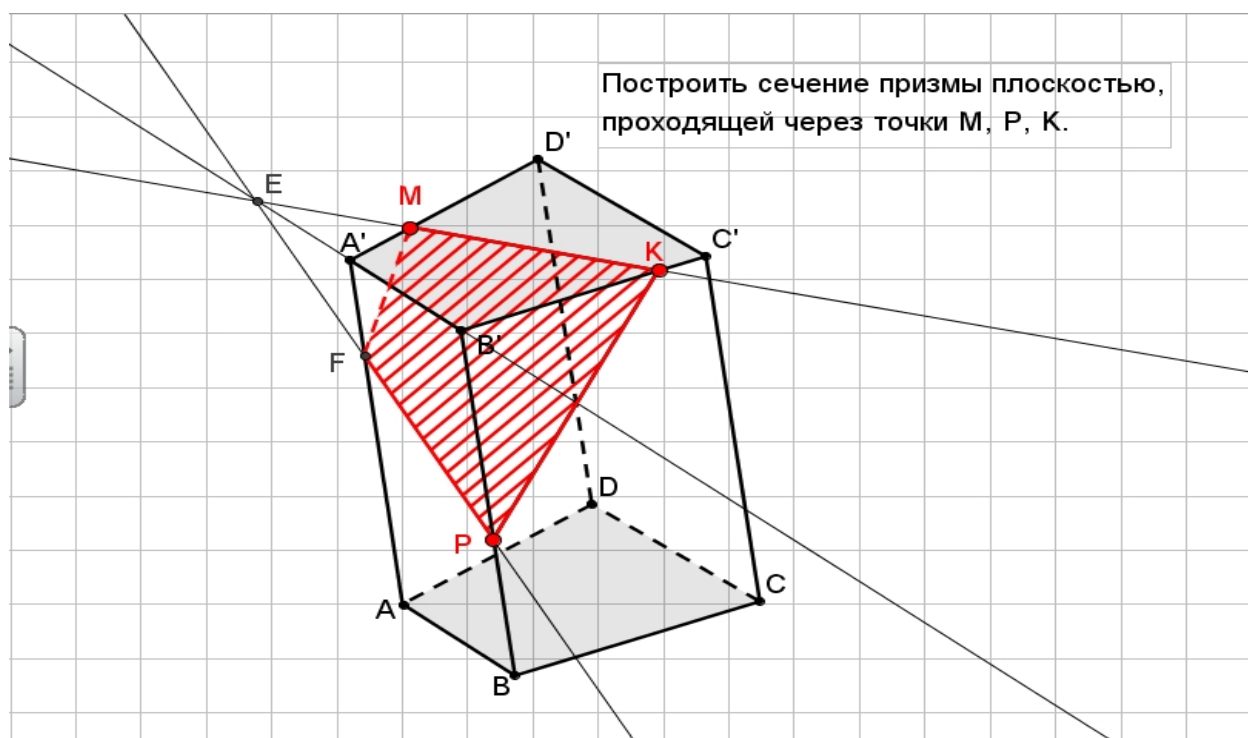
Построение сечений. Поверхность многогранников.

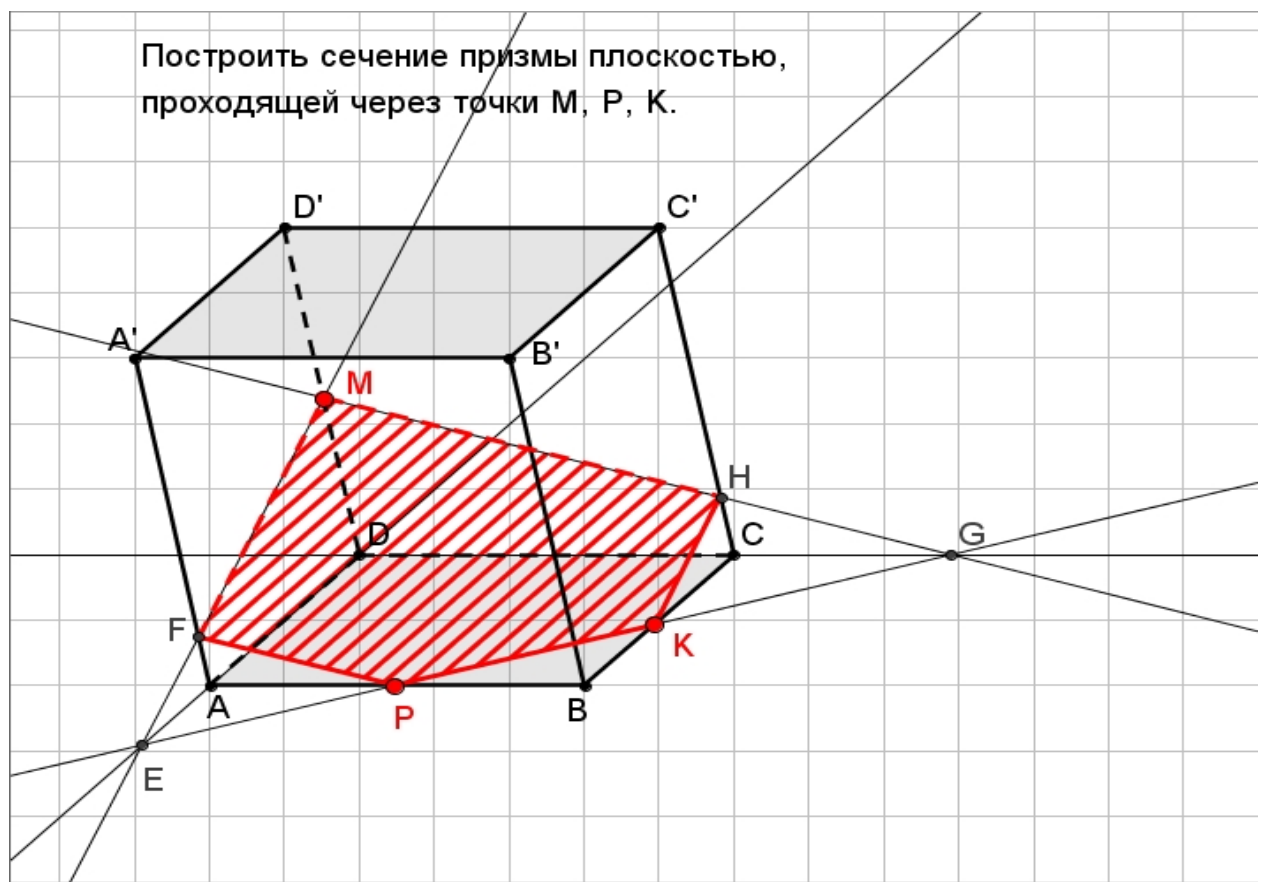
Цель работы: выработать практический навык построения сечений многогранников.

ХОД РАБОТЫ

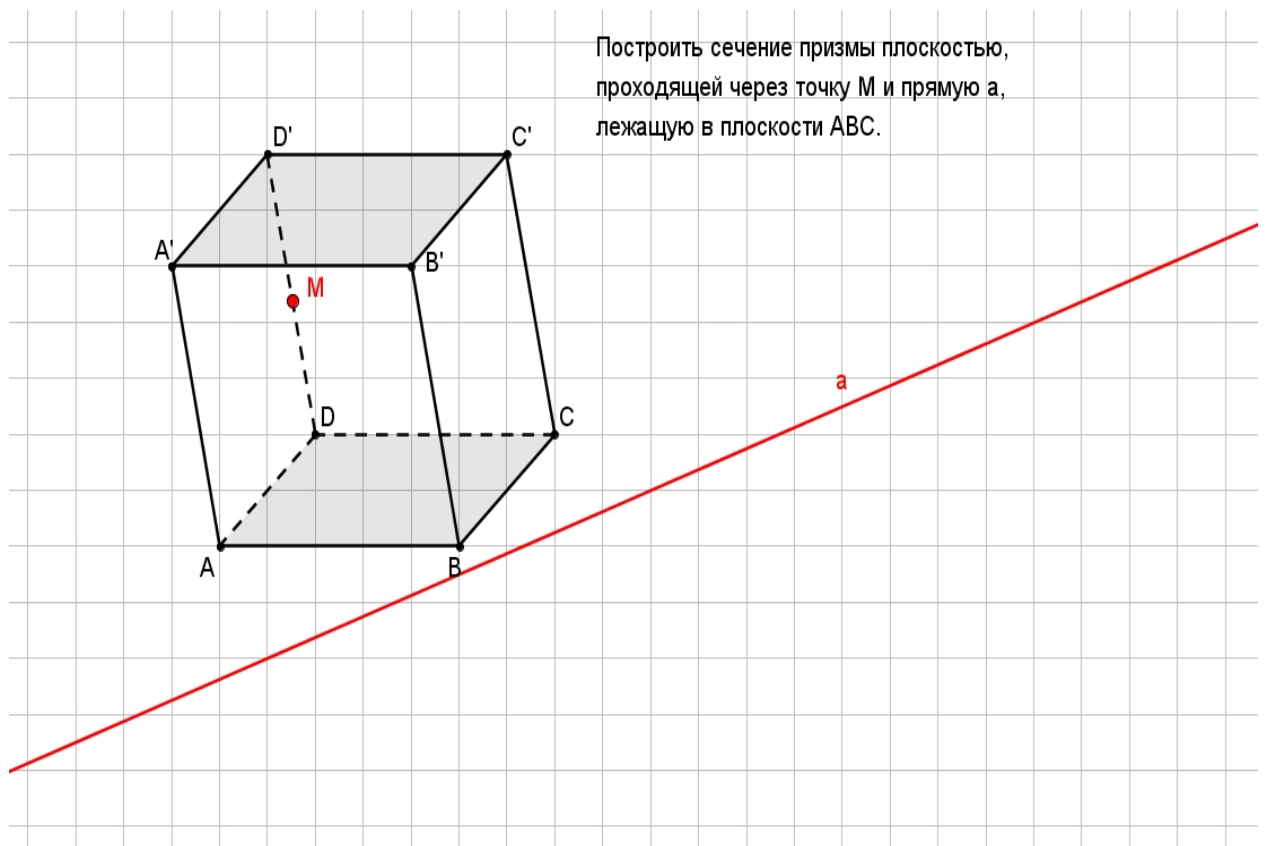
1. Рассмотрите предложенные задачи с построенными сечениями и запишите ход построения сечения.



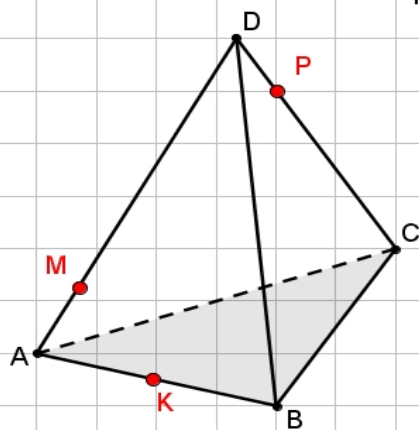




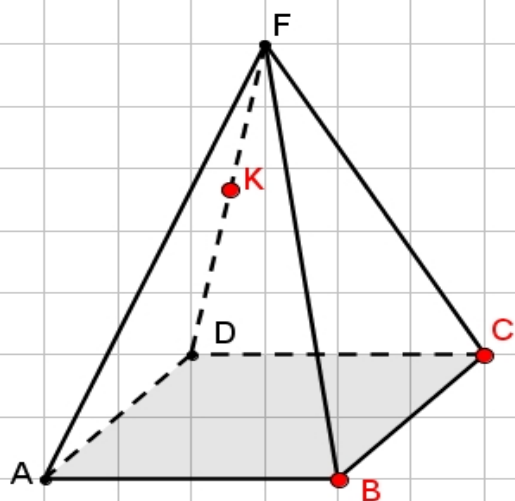
2. Решите задачи самостоятельно.



Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки М, Р и К.



Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через ребро ВС и точку К.



Практическая работа №35.

Нахождение элементов цилиндра, конуса, шара. Построение сечений.

Цель урока: способствовать формированию умений и навыков по вычислению площади поверхности цилиндра, конуса, шара.

Обучающийся должен знать:

- основные элементы цилиндра, конуса, шара;
- формулы вычисления площади поверхности цилиндра, конуса, шара.

Обучающийся должен уметь:

- вычислять площадь боковой поверхности цилиндра и конуса;
- вычислять площадь поверхности шара.
- вычислять площадь полной поверхности цилиндра и конуса;

Рекомендации по выполнению практической работы:

1. Прочтите задание.
2. Запишите условие задачи.
3. Запишите кратко дано
4. Выполните рисунок.
5. Запишите решение и ответ.

Краткие теоретические положения:

Цилиндр (рис. 1.18)

Площадь боковой поверхности:

$$S_{\text{бок}} = 2\pi RH.$$

Площадь полной поверхности:

$$S_{\text{пол}} = 2\pi RH + 2\pi R^2.$$

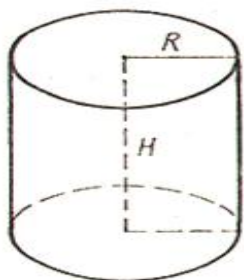


Рис. 1.18

Конус (рис. 1.19)

Площадь боковой поверхности:

$$S_{\text{бок}} = \pi RL.$$

Площадь полной поверхности:

$$S_{\text{пол}} = \pi RL + \pi R^2.$$

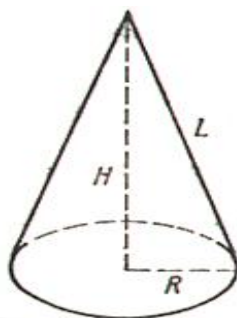
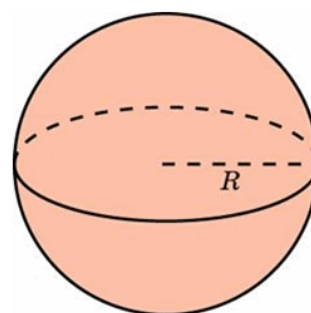


Рис. 1.19

Шар

радиуса r



Площадь поверхности S и объём V шара определяются формулами:

- $S = 4\pi r^2$
- $S = \pi d^2$
- $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Задача 1.

Площадь боковой поверхности цилиндра равна 21π , а диаметр основания равен 7. Найдите высоту цилиндра.

Решение.

Высота цилиндра равна

$$h = \frac{S_{\text{бок}}}{2\pi R} = \frac{S_{\text{бок}}}{\pi D} = \frac{21\pi}{7\pi} = 3.$$

Ответ: 3.

Задача 2.

Площадь основания конуса $36\pi \text{ см}^2$, а его образующая 10 см.

Вычислить боковую поверхность конуса.

Решение.

Зная площадь основания, найдем его радиус.

$$S = \pi R^2, \quad 36\pi = \pi R^2, \quad R^2 = 36, \quad R = 6$$

Площадь боковой поверхности конуса найдем по формуле:

$S = \pi Rl$, где R - радиус основания, l - длина образующей, откуда

$$S = \pi \cdot 6 \cdot 10 = 60\pi$$

Ответ: 60π см².

Задача 3. Объем шара равен 288π . Найдите площадь боковой поверхности конуса вписанного в шар. Основанием конуса является больший круг.

Решение.

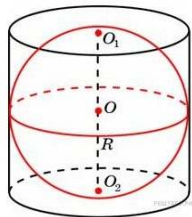
Объем шара радиуса R вычисляется по формуле $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, откуда найдем радиус шара

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 288\pi}{4\pi}} = 6$$

Площадь боковой поверхности конуса равна $S = \pi Rl$, $l = R\sqrt{2}$. следовательно $S = \pi 6 \cdot 6\sqrt{2} = 36\sqrt{2}\pi$ Ответ: $36\sqrt{2}\pi$.

Задача 4. Около шара описан цилиндр, площадь поверхности которого равна 18.

Найдите площадь поверхности шара.



поверхности

шара

равна

12.

Ответ: 12.

Решение.

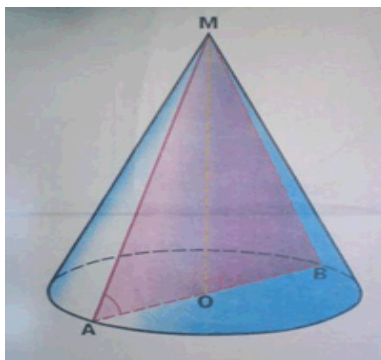
По построению радиусы шара и основания цилиндра равны. Площадь поверхности цилиндра, с радиусом основания r и высотой $2r$ равна $S = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r = 6\pi r^2$.

Площадь поверхности шара радиуса r равна $S = 4\pi r^2$, то есть в 1,5 раза меньше площади поверхности цилиндра. Следовательно, площадь

Задания для практической работы

1 вариант

1. Площадь осевого сечения прямого круглого цилиндра равна 24. Найдите площадь его боковой поверхности.
2. Высота цилиндра 6дм, радиус основания 5дм. Найдите боковую поверхность цилиндра.
3. Диагональ осевого сечения цилиндра наклонена к плоскости основания под углом 60° и равна 20 см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
4. Высота конуса равна 6, образующая равна 10. Найдите площадь боковой поверхности конуса.



5. Образующая конуса равна 18 см и наклонена к плоскости основания под углом 60° . Найдите площадь полной поверхности конуса.

6. Во сколько раз уменьшится площадь боковой поверхности конуса,

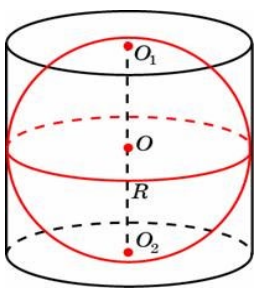
если радиус его основания уменьшить в 1,5 раза?

7. Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в три раза?

8. Радиусы трех шаров равны 6, 8 и 10. Найдите радиус шара, объем которого равен сумме их объемов.

9. Площадь большого круга шара равна 3. Найдите площадь поверхности шара.

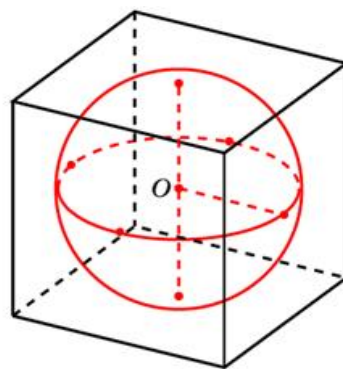
10. Объем шара равен 972π . Найдите площадь его поверхности.



11. Около шара описан цилиндр, площадь поверхности которого равна 81. Найдите площадь поверхности шара.

12. В куб с ребром 3 вписан шар.

Найдите площадь поверхности этого шара.



За каждое задание практической работы получаете 2 баллов.

получаете 2

Отметка	Число баллов, необходимое для получения отметки
«3» (удов.)	8 - 12
«4» (хорошо)	13-20
«5» (отлично)	Более 20

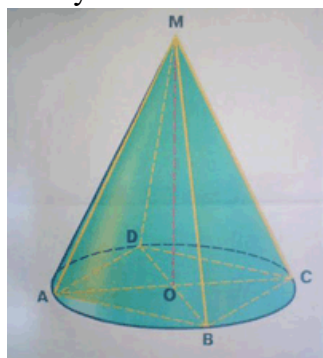
2 вариант

1. Площадь осевого сечения прямого круглого цилиндра равна 4. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

2. Диагональ осевого сечения цилиндра 13 см, высота 5см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

3. Диагональ осевого сечения цилиндра равна $8\sqrt{2}$ см и образует с плоскостью основания угол 45° . Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

4. Радиус основания конуса равен 3, высота равна 4. Найдите площадь боковой поверхности конуса.



5. В конус, высота которого 20 см, вписана пирамида. Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 18 см и 20 см. Найдите образующую и радиус основания конуса, площадь поверхности конуса.

6. Площадь осевого сечения конуса равна $0,6 \text{ см}^2$. Высота конуса равна 1,2 см. Вычислить площадь полной поверхности конуса.

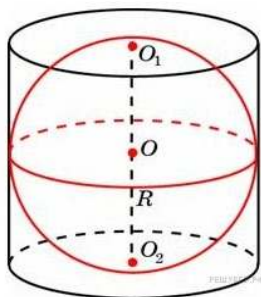
7. Во сколько раз увеличится площадь поверхности шара, если его радиус увеличить в два раза?

8. Радиусы двух шаров равны 6, 8. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей их поверхностей.

9. Площадь большого круга шара равна 1. Найдите площадь поверхности шара.

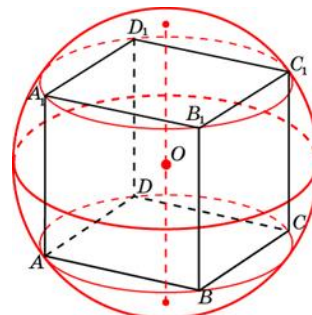
10. Объем шара равен 36π . Найдите площадь его поверхности

11. Около шара описан цилиндр, площадь поверхности которого равна 54. Найдите площадь поверхности шара.



12. Около куба с ребром $\sqrt{3}$ описан шар. Найдите площадь поверхности этого шара.

XXX. За каждое задание практической работы получаете 2 баллов.



Отметка	Число баллов, для получения отметки
«3» (удов.)	8 - 12
«4» (хорошо)	13-20

Вопросы для самоконтроля

1. Как вычисляется площадь поверхности цилиндра?
2. Как вычисляется площадь поверхности конуса?
3. Как вычисляется площадь поверхности шара?

Список литературы:

Башмаков М.И. Математика: учебник для учреждений нач. и сред. проф. образования / М.И.Башмаков. – М.: Издательский центр «Академия», 2011. – 256с.

Математика. Пособие для подготовки к ЕГЭ и централизованному тестированию: Учебно-методическое пособие / Л.Д. Лаппо, М.А. Попов. – М.: Издательство «Экзамен», 2014.

Единый государственный экзамен: математика: контрол.-измерит. материалы: М.: Просвещение; СПб.: Просвещение, 2015.
интернет ресурсы.

Практическая работа № 36.**Вписанные и описанные тела вращения.**

Цель: 1) обучающая:

- систематизировать и обобщить знания о цилиндре и конусе;
- закрепить формулы площади боковой поверхности и площади основания и их применение для нахождения определяющих элементов тела вращения;

2) развивающая:

- формировать практическое применение полученных данных про тело вращения для конструирования заданного тела из подручного материала (бумага);

3) воспитательная: развивать самостоятельность и работоспособность.

Справочный материал: формулы площадей основания цилиндра и конуса; формулы боковой поверхности цилиндра и конуса; формула длины окружности; формула длины дуги (кругового сектора) в n градусов; число $\pi = 3,14$.

Вид урока: практическое занятие

Ход урока.**1. Организационный момент: эмоциональный настрой:**

Великий поэт, философ, математик Омар Хайям в одном из своих произведений призывает быть хозяевами своей судьбы:

«Ты скажешь, эта жизнь - одно мгновенье.

Её цени, в ней черпай вдохновенье.

Как проведёшь её, так и пройдёт.

Не забывай: она – твоё творенье»

Сегодня вашими маленькими творениями станут бумажные цилиндры и конусы, которые Вы сделаете своими руками, применяя полученные знания и умения. Удачи Вам.

2. Актуализация опорных знаний: краткое описание практической работы, озвучивание необходимого справочного материала и принципа расчета данных учащимися:

Каждый из учащихся получает карточку с данными о теле вращения: числовые значения площади основания и площади боковой поверхности для определенного тела – цилиндра или конуса. **Задание учащегося:** сделать из бумаги заданное тело вращения (цилиндр или конус), рассчитав предварительно необходимые для конструирования размеры определяющих элементов, используя развертку тела и данные числовые значения площадей.

ЦИЛИНДР

Развертка цилиндра: прямоугольник (боковая поверхность цилиндра) и два круга одинакового радиуса r (два основания цилиндра);

Длина и ширина прямоугольника – это соответственно длина окружности основания l (для нахождения которой необходимо знать радиус основания цилиндра) и высота цилиндра H .

КОНУС

Развертка конуса: круг радиуса r (основание конуса) и круговой сектор радиуса R и длиной дуги l (боковая поверхность конуса), где R – образующая конуса L , l – длина окружности (основания конуса) радиуса r .

3. Сообщение темы практической работы и цели.

4. Выполнение практической работы.

1) Ознакомление с заданными величинами:

Варианты заданий:

для цилиндра:

- а) S основания = 50,24 см кв; S боковой поверхности = 502,4 см кв;
- б) S осн. = 38,465 см кв; S бок. п. = 439,6 см кв;
- в) S осн. = 28,26 см кв; S бок. п. = 395,64 см кв;
- г) S осн. = 50,24 см кв; S бок. п. = 477,28 см кв;

для конуса:

- а) S осн. = 78,5 см кв; S бок. п. = 282,6 см кв;
- б) S осн. = 50,24 см кв; S бок. п. = 251,2 см кв;
- в) S осн. = 113,04 см кв; S бок. п. = 376,8 см кв.

2) Вычисление необходимых размеров, используя известные данные (числовые значения площадей)

Для цилиндра:

- из формулы $S_{\text{осн.}} = \pi r^2$ находится r (радиус основания = радиус кругов)
- зная r , вычисляется длина окружности основания $l = 2\pi r$ (длина прямоугольника)
- из формулы $S_{\text{бок. п.}} = 2\pi rH$ находится высота H (ширина прямоугольника)

Для конуса:

- из формулы $S_{\text{осн.}} = \pi r^2$ находится r (радиус основания = радиус круга)
- из формулы $S_{\text{бок. п.}} = \pi rL$ находится образующая L (радиус R кругового сектора)
- зная длину дуги ($l = 2\pi r$) и радиус сектора, вычисляется градусная мера n дуги следующим образом: из формулы длины дуги в n градусов $l = \pi Rn/180$ имеем $n = 180 \cdot l / \pi R$,

так как $l = 2\pi r$, тогда $n = 180 \cdot 2\pi r / \pi R$, после сокращений имеем $n = 360r/R$.

3) Выполнение построений на листе по рассчитанным размерам, используя чертежное оборудование

4) Сборка заданного тела вращения

5) Для последующей проверки работ каждый на основании сделанного тела вращения пишет номер своего варианта (указан на карточке с заданием)

6) Обучающийся сдает на проверку сделанный бумажный цилиндр или конус и расчеты, выполненные им в процессе работы.

5. Итог урока. Выставка работ обучающихся и оценивание результатов.

6. Ответы к вариантам заданий:

Для цилиндра:

- а) $r = 4$ см, $l = 25,12$ см, $H = 20$ см;
- б) $r = 3,5$ см, $l = 21,98$ см, $H = 20$ см;
- в) $r = 3$ см, $l = 18,84$ см, $H = 21$ см;
- г) $r = 4$ см, $l = 25,12$ см, $H = 19$ см.

для конуса:

- а) $r = 5$ см, $R = L = 18$ см, $n = 100$ градусов;
- б) $r = 4$ см, $R = L = 20$ см, $n = 72$ градусов;
- в) $r = 6$ см, $R = L = 20$ см, $n = 108$ градусов.

Практическая работа №37

Вычисление пределов последовательностей.

Цель: сформировать умение находить пределы функций, использовать замечательные пределы для нахождения пределов.

Теоретические сведения к практической работе.

Число A называют *пределом функции* $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ (и пишут $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, зависящее от ε , такое, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Теоремы о пределах:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ ($c = \text{const}$).

2. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = B$, то:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A \pm B;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A \cdot B;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)} = \frac{A}{B}, \quad (B \neq 0).$$

Первый замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Второй замечательный предел (число $e = 2,718\dots$):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 1/x)^x = e \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Замечательные пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

Примеры решения:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1} = \frac{2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 5}{1 + 1} = \frac{-6}{2} = -3$$

Когда дан любой предел, сначала просто пытаемся подставить число в функцию

1) Пределы с неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$ и метод их решения

1) деление на x в старшей степени:

Пример 1:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{1 + x + 3x^2} = \frac{\infty}{\infty}$$

Сначала мы смотрим на числитель и находим x в старшей степени:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{1 + x + 3x^2}$$

Старшая степень в числителе равна двум.

Теперь смотрим на знаменатель и тоже находим x в старшей степени:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{1 + x + 3x^2}$$

Старшая степень знаменателя равна двум.

Затем мы выбираем самую старшую степень числителя и знаменателя: в данном примере они совпадают и равны двойке.

Итак, метод решения следующий: для того, чтобы раскрыть неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ необходимо разделить числитель и знаменатель на x в старшей степени.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{1 + x + 3x^2} = \frac{\infty}{\infty} = (*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^2

$$(*) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} - \frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{3x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 3} = \frac{2}{3}$$

Пример 2:

Найти предел

Снова в $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 15x^2 + 9x + 1}{5x^4 + 6x^2 - 3x - 4}$ числителе и знаменателе находим x в старшей степени:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 15x^2 + 9x + 1}{5x^4 + 6x^2 - 3x - 4}$$

Максимальная степень в числителе: 3
Максимальная степень в знаменателе: 4

Выбираем наибольшее значение, в данном случае четверку.

Разделим числитель и знаменатель на x^4

$$\begin{aligned}
 (*) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{7x^3 + 15x^2 + 9x + 1}{x^4}}{\frac{5x^4 + 6x^2 - 3x - 4}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{7}{x} + \frac{15}{x^2} + \frac{9}{x^3} + \frac{1}{x^4}}{5 + \frac{6}{x^2} - \frac{3}{x^3} - \frac{4}{x^4}} = \\
 &= \frac{0+0+0+0}{5+0-0-0} = \frac{0}{5} = 0
 \end{aligned}$$

Пример 3

Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1} = \frac{\infty}{\infty} = (*)$$

Разделим

числитель и знаменатель на x^2

$$(*) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 - 3x - 5}{x^2}}{\frac{x + 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{0} = \infty$$

при раскрытии неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ у нас может получиться *конечное число*, ноль или бесконечность.

2. Пределы с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$ и метод их решения

1) разложение числителя и знаменателя на множители.

Пример 4

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1} = \frac{0}{0} = (*)$$

Разложим числитель и знаменатель на множители

Для того чтобы разложить числитель на множители, нужно решить квадратное уравнение:

$$2x^2 - 3x - 5 = 0$$

Сначала

находим

дискриминант:

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 9 + 40 = 49$$

И квадратный корень из него: $\sqrt{D} = \sqrt{49} = 7$ Далее находим корни:

$$x_1 = \frac{-(-3) - 7}{2 \cdot 2} = \frac{3 - 7}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \quad x_2 = \frac{-(-3) + 7}{2 \cdot 2} = \frac{3 + 7}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

Таким образом:

$$2x^2 - 3x - 5 = 2(x - (-1)) \cdot \left(x - \frac{5}{2}\right) = 2(x + 1) \cdot \left(x - \frac{5}{2}\right) = (x + 1) \cdot (2x - 5)$$

Всё. Числитель на множители разложен.

Знаменатель. Знаменатель $x + 1$ уже является простейшим множителем, и упростить его никак нельзя.

$$(*) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1) \cdot (2x - 5)}{x + 1} = (*)$$

можно сократить на $(x + 1)$:

$$(*) = \lim_{x \rightarrow -1} (2x - 5) = (*)$$

Теперь и подставляем -1 в выражение, которое осталось под знаком предела: $= 2 \cdot (-1) - 5 = -2 - 5 = -7$

$$(*) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1) \cdot (2x - 5)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (2x - 5) = -2 - 5 = -7$$

2) умножение числителя и знаменателя на сопряженное выражение.

Пример 5

Найти предел $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}}{5x-15} = \frac{0}{0} = (*)$

Умножаем числитель и знаменатель на сопряженное выражение:

$$(*) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} = (*)$$

Применяем вверху формулу $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$:

$$(*) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6})^2 - (\sqrt{10x-21})^2}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+6 - (10x-21)}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+6-10x+21}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9x+27}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} = (*)$$

Неопределенность $\frac{0}{0}$ не пропала (попробуйте подставить тройку), да и корни тоже не исчезли. Но с **суммой** корней всё значительно проще, ее можно превратить в постоянное число. Как это сделать? Да просто подставить тройку под корни:

$$(*) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9x+27}{(5x-15) \cdot (\sqrt{3+6} + \sqrt{10 \cdot 3 - 21})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9x+27}{(5x-15) \cdot (\sqrt{9} + \sqrt{9})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9x+27}{(5x-15) \cdot (3+3)} =$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9x+27}{5x-15} = (*)$$

Число, как уже отмечалось ранее, лучше вынести за значок предела.

Теперь осталось разложить числитель и знаменатель на множители и сократить «виновников» неопределённости, ну а предел константы – равен самой константе:

$$(*) = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9(x-3)}{5(x-3)} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9}{5} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{-9}{5} \right) = -\frac{3}{10}$$

Решение данного примера в чистовом варианте выглядит так:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}}{5x-15} = \frac{0}{0} = (*)$$

Умножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение.

$$\begin{aligned}
 (*) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})}{5(x-3) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} = \\
 &= \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+6 - (10x-21)}{(x-3) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} = \\
 &= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+6-10x+21}{(x-3)} = \frac{1}{30} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9x+27}{(x-3)} = \\
 &= \frac{1}{30} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9(x-3)}{(x-3)} = \frac{-9}{30} = -\frac{3}{10}
 \end{aligned}$$

3) использование 1-го замечательного предела

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Пример 6

Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{3x}$$

Выражение под знаком предела похоже на первый замечательный предел, но это не совсем он, под синусом находится $7x$, а в знаменателе $3x$. В подобных случаях первый замечательный предел нам нужно организовать самостоятельно, используя искусственный прием. Ход рассуждений может быть таким: «под синусом $7x$, значит, в знаменателе тоже нужно получить $7x$ ». А делается это очень просто:

(1-й замечательный предел)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{3x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{3 \cdot \frac{1}{7} \cdot 7x} = \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

Пример 7

Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{\sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \cdot x}{\sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}} = 5 \cdot 2 \cdot 2 = 20$$

Пример 8

Найти предел

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{2x^2} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x^2 \cdot (\cos 2x)^{\rightarrow 1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x^2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = \infty
 \end{aligned}$$

Пример 9

Найти предел

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{5x} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x}{5x} = \frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x} = \\
 &= \frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cdot \sin 2x}{\frac{1}{2} \cdot 2x} = \frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5} \cdot 2 \lim_{x \rightarrow 0} (\sin 2x)^{\rightarrow 0} = \frac{4}{5} \cdot 0 = 0
 \end{aligned}$$

Пример 10

Найти предел

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctgx} \cdot (1 - \cos^2 3x)}{(x^2 + 5x)} &= \frac{\infty \cdot 0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot (1 - \cos^2 3x)}{\sin x \cdot (x^2 + 5x)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot (1 - \cos^2 3x)}{\sin x \cdot (x^2 + 5x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 3x}{\sin x \cdot (x^2 + 5x)} = \frac{0}{0} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\sin x \cdot x \cdot (x + 5)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\sin x \cdot x \cdot (x^{\rightarrow 0} + 5)} = \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\sin x \cdot x} = \\
&= \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cdot \sin 3x}{\sin x \cdot x} = \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin 3x \cdot \sin 3x}{\sin x \cdot 3x \cdot 3x \cdot \frac{1}{9}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\frac{1}{9}} = \frac{9}{5}
\end{aligned}$$

Второй замечательный предел

В теории математического анализа доказано, что:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} = e$$

Данный факт носит название **второго замечательного предела**.

Справка: $e = 2,718281828\dots$ – это иррациональное число.

В качестве параметра α может выступать не только переменная x , но и сложная функция. **Важно лишь, чтобы она стремилась к бесконечности.**

Пример 11

Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{4x}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^{\infty}$$

Данная неопределенность как раз и раскрывается с помощью второго замечательного предела. Но, как часто бывает, второй замечательный предел нужно искусственно организовать. Рассуждать можно следующим образом: в данном примере параметр $\alpha = 3x$, значит, в показателе тоже нужно организовать $3x$. Для этого возводим

основание в степень $3x$, и, чтобы выражение не изменилось – возводим в степень $\frac{1}{3x}$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x} \right)^{\frac{1}{3x} \cdot 4x}$$

страшная степень превратилась в симпатичную букву e :

При этом сам значок предела перемещаем в показатель:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{\frac{1}{3x} \cdot 4x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{3x}} = e^{\frac{4}{3}}$$

e (2-ой замечательный предел)

Содержание практической работы.

1. Вычислить пределы функции:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 1}{8x^2 - 9x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 9x}{6x^3 - x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4 + 1}{8x^2 - 11x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x^2 - 9}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4x+5} - 3\sqrt{x}}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 7x - 4}{3x^2 - 13x + 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x} - 2}{3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{3x^3 - x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{2-x} - 1}$$

Вычислить пределы функций, используя замечательные пределы.

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\operatorname{tg} 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{5x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - 1}{\sin 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\operatorname{tg} 9x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x \left(1 + \frac{5}{7x}\right)^{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}$$

Практическая работа №38

Предел функции в точке и на бесконечности. Правила дифференцирования.

Цель: на конкретных примерах научиться вычислять пределы функции в точке и на бесконечности.

Учебные задачи:

1. Закрепить умение вычислять пределы непрерывной функции.
2. Научиться раскрывать неопределенности.
3. Учить рассуждать и логически мыслить.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия

Типы неопределенностей и методы их раскрытия

Часто при вычислении пределов какой-либо функции, непосредственное применение теорем о пределах не приводит к желаемой цели. Так, например, нельзя применять теорему о пределе дроби, если ее знаменатель стремится к нулю. Поэтому часто прежде, чем применять эти теоремы,

необходимо тождественно преобразовать функцию, предел которой мы ищем. Рассмотрим некоторые приемы раскрытия неопределенностей.

I. Неопределенность вида $\frac{0}{0}$

Пример 1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x^2-25}$

Решение: При подстановке вместо переменной x числа 5 видим, что получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия нужно разложить знаменатель на множители: $x^2 - 25 = (x-5)(x+5)$, получили общий множитель $(x-5)$, на который можно сократить дробь. Заданный предел примет вид: $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x+5}$. Подставив $x=5$, получим результат: $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x^2-25} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x^2-25} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x+5} = \frac{1}{10}$

Пример 2. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$

Решение: При подстановке вместо переменной x числа 3 видим, что получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия разложим числитель и знаменатель на множители и сократим на общий множитель $x-3$. В результате получим новый предел, знаменатель которого при подстановке вместо переменной x числа 3 не равен нулю. Этот предел легко вычисляется по теоремам. Таким образом, неопределенность будет раскрыта.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{x+3} = \frac{3-2}{3+3} = \frac{1}{6}$$

Пример 3. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

Решение: При подстановке вместо переменной x числа 0 видим, что получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия воспользуемся первым замечательным пределом

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ и его следствием $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$. После чего предел легко вычисляется по теоремам. Таким образом, неопределенность будет раскрыта.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{2}{3} \right) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

II. Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$

Пример 4. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-8x}{4x+5}$

Решение: При подстановке вместо переменной x бесконечности (∞) видим, что получается неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для ее раскрытия нужно числитель и знаменатель разделить на наивысшую степень, в данном случае на x . Получим:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-8x}{4x+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - 8}{\frac{4x}{x} + \frac{5}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - 8}{4 + \frac{5}{x}} = \frac{0-8}{4+0} = \frac{-8}{4} = -2, \quad \text{т.к. величины } \frac{1}{x}, \frac{5}{x} \text{ являются}$$

бесконечно малыми и их пределы равны 0.

Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию:

1. Дать определение предела переменной величины.
2. Перечислить свойства пределов.
3. Дать определение б.м. и б.б. величин.
4. Даны величины: $\frac{1}{a}$; a^2 ; $\frac{1}{a^3+1}$; a^4+3 . Предел каких величин равен 0 при

$a \rightarrow \infty$?

Задания для практического занятия:

1 вариант	2 вариант
Вычислите пределы:	
1) $\lim_{x \rightarrow 1} (4x + 3x^2 - 1)$;	1) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x + 1)$;
2) $\lim_{x \rightarrow -2} (3x - 4x^2)$;	2) $\lim_{x \rightarrow -1} (8x - 6)$;
3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 + 5x - 2}$	3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x + 5}{x^2 + 6}$
4) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{25 - x^2}{5 - x}$;	4) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{49 - x^2}{7 - x}$;
5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$;	5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2}$;
6) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 9x}{x - 3}$;	6) $\lim_{x \rightarrow 11} \frac{121x - x^3}{11 - x}$;
7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 8x^2 - 3}{4x + 3x^5}$;	7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 3 + 2x^4}{4x^4 - 5}$;
8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + 3x - 1}{4x + x^4}$;	8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - x^2 - 3x + 5}{2x + x^7}$
9) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5 - 2x^4 + 3x - 1}{x^3 + 2x^2 + 4x - 2}$	9) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x - 2}{x^4 - 2x^3 + 3x - 1}$
10) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{7+2x-x^2}}{x^2 - 2x}$	10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}}{x^2 - x}$

Инструкция по выполнению практического занятия

1. Познакомиться с конспектами лекций и примерами в краткой теоретической справке
2. Ответить устно на контрольные вопросы.
3. Используя конспекты лекций и примеры, решить практические задания.

Порядок выполнения отчёта по практической работе:

1. Выполнить задания 1-3.
2. Ответить на вопросы для закрепления теоретического материала (устно).
3. Оформить отчёт по практической работе.

Образец отчёта по практической работе:

Тема.

Учебная цель.

Название практической работы.

Решение заданий практической работы.

Ответы на вопросы для закрепления теоретического материала.

Практическая работа №39.

Производная сложной функции. Физический и геометрический смысл производной.

Цель: корректировать знания, умения и навыки в теме: «Вычисление производных сложных функций», закрепить и систематизировать знания по теме.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. Ответить на контрольные вопросы:
 - а) Какая функция называется сложной? Приведите примеры сложных функций.
 - б) Сформулируйте правило вычисления производной сложной функции.
2. По образцу выполнить тренировочные задания.
3. Изучить условие заданий для практической работы.
4. Оформить отчет о работе.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия

Таблица производных основных элементарных функций:

- | | |
|--|--|
| 1. $(c)' = 0, (cu)' = cu'$; | 12. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$ |
| 2. $x' = 1$ | 13. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$ |
| 3. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in R)$ | 14. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$ |
| 4. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$ | 15. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$ |
| 5. $(\frac{1}{u^n})' = -\frac{n}{u^{n+1}} \cdot u'$ | 16. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$ |
| 6. $(u + v)' = u' + v'$; | 17. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$ |
| 7. $(uv)' = u'v + v'u$; | 18. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$ |
| 8. $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ | 19. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$ |
| 9. $(e^u)' = e^u \cdot u'$ | 20. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$ |
| 10. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$ | |
| 11. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$ | |

Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию:

1. Дать определение производной.
2. Записать формулы дифференцирования.

Чему равна производная постоянной?

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

ПРИМЕР 1. Заданы функции $f(x) = 2 + 6x^3$, $g(x) = \operatorname{tg} x$. Задайте формулой сложную функцию h , если: а) $h(x) = g(f(x))$; б) $h(x) = f(g(x))$.

РЕШЕНИЕ. а) Функцию h можно представить в виде сложной функции $h(x) = g(f(x))$ таким образом:

$$h(x) = g(f(x)) = tg(2 + 6x^3).$$

б) Функцию h можно представить в виде сложной функции $h(x) = f(g(x))$ таким образом:

$$h(x) = f(g(x)) = 2 + 6tg^3x.$$

ПРИМЕР 2. Задайте формулами элементарные функции f и g , из которых составлена сложная функция $h(x) = g(f(x))$: а) $h(x) = (4x - 9)^7$; б) $\sqrt{tgx}$.

РЕШЕНИЕ. а) Функцию h можно представить в виде сложной функции $h(x) = g(f(x))$, где

$$g(y) = y^7, \quad y = f(x) = 4x - 9.$$

б) Функцию h можно представить в виде сложной функции $h(x) = g(f(x))$, где

$$g(y) = \sqrt{y}, \quad y = f(x) = tgx.$$

ПРИМЕР 3. Найдите производные сложных функций: а) $h(x) = \sqrt{9 - x^2}$; б) $h(x) = \sin\left(3 - \frac{x}{2}\right)$.

РЕШЕНИЕ. а) Так как $h(x) = g(f(x))$, где $g(y) = \sqrt{y}$, $y = f(x) = 9 - x^2$, то $g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ и

$$y' = f'(x) = -2x, \text{ откуда } h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' = \frac{-2x}{2\sqrt{9 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}.$$

б) Так как $h(x) = g(f(x))$, где $g(y) = \sin y$, $y = f(x) = 3 - \frac{x}{2}$, то $g'(y) = \cos y$ и

$$y' = f'(x) = -\frac{1}{2}, \text{ откуда } h'(x) = \cos y \cdot y' = \cos\left(3 - \frac{x}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \cos\left(3 - \frac{x}{2}\right).$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ.

1. Задайте формулами элементарные функции f и g , из которых составлена сложная

функция $h(x) = g(f(x))$, если $h(x) = \frac{1}{\sin^5 x}$.

2. Найдите производную сложной функции $h(x) = \sqrt{\frac{4}{x^2} - 1}$.

Задания для практического занятия:

1 вариант	2 вариант
1. Найдите производную:	
1) $y = x^2 - 7x$;	1) $y = x^4 - 3x$;
2) $y = x^5 + 2x$;	2) $y = x^3 - x^5$;
3) $y = 7x^2 + 3x$;	3) $y = 4x^4 - 6x$;
4) $y = 15x + \sqrt{x}$;	4) $y = 16x - 2\sqrt{x}$;
5) $y = 10x^2 + \frac{1}{x}$;	5) $y = 2x^3 - \frac{1}{x}$;
6) $y = \sin x + 3$;	6) $y = 2 \cos x - 4x^2$;
7) $y = -2x^2 - \frac{1}{x}$;	7) $y = -4x^4 - \frac{3}{x}$;
8) $y = -2\sqrt{x} - \frac{1}{x}$;	8) $y = -3\sqrt{x} + \frac{1}{14}x^7$.

2.Вычислить производную функции, используя правила дифференцирования	
1) $y = \cos x \cdot \sin x$; 2) $y = \sqrt{x} \cdot e^x$; 3) $y = \frac{4x^2 + 1}{2x - x^4}$;	1) $y = \operatorname{tg} x \cdot e^x$; 2) $y = \sin x \cdot (x^3 + 2x)$; 3) $y = \frac{x^3 + 2x^6}{3x - x^5}$.
3.Решите уравнения $f'(x) = 0$.	
$f'(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{4} - \frac{3}{2}x^2 - 3x$;	$f'(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} - 2x$

Инструкция по выполнению практического занятия

1. Познакомиться с конспектами лекций и краткой теоретической справкой
2. Ответить устно на контрольные вопросы.
3. Используя конспекты лекций, решить практические задания.

ВАРИАНТЫ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Вариант 1.

Вычислите производные сложных функций:

а) $f(x) = \sqrt[4]{1+x^2}$; б) $f(x) = 5^{2x}$; в) $f(x) = \sin 3x$; г) $f(x) = \frac{\ln x}{e^x + e^{-x}}$; д) $f(x) = 2\operatorname{tg}^3 4x$.

Вариант 2.

Вычислите производные сложных функций:

а) $f(x) = \frac{1}{(2x-1)^2}$; б) $f(x) = e^{-3x}$; в) $f(x) = \cos 5x$; г) $f(x) = (3x+4) \cdot \log_5(x+1+x^2)$;
д) $f(x) = 4\operatorname{ctg}^3 2x$.

Вариант 3.

Вычислите производные сложных функций:

а) $f(x) = (3-x)^4$; б) $f(x) = 2\log_3 2x$; в) $f(x) = 3\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$; г) $f(x) = (x^2 + 4) \cdot e^{-x^2}$;
д) $f(x) = 2\sin^3 4x$.

Вариант 4.

Вычислите производные сложных функций:

а) $f(x) = \sqrt[5]{x + \sqrt{x}}$; б) $f(x) = \lg(3x)$; в) $f(x) = 3\cos \frac{x}{3}$; г) $f(x) = x \cdot 2^{3x+x^2}$;
д) $f(x) = \log_3^2(2x+1)$.

Вариант 5.

Вычислите производные сложных функций:

а) $f(x) = (3-2x^3)^5$; б) $f(x) = 0,3^{3x^2-7x+2}$; в) $f(x) = \cos(x^2 + 4x + 12)$;
г) $f(x) = (3x + 5x^2 + x^3) \cdot 4^{x^2}$; д) $f(x) = 3\sin^2 5x$.

Вариант 6.

Вычислите производные сложных функций:

а) $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 5)^3}$; б) $f(x) = e^{-4x}$; в) $f(x) = \operatorname{tg} x^3$; г) $f(x) = \frac{5x}{\sin 6x}$; д) $f(x) = (\ln(2x+1))^6$.

Вариант 7.

Вычислите производные сложных функций:

а) $f(x) = x^2 \cdot e^{x^2+3x}$; б) $f(x) = \operatorname{tg}^2 2x$; в) $f(x) = \sin(5-x)$; г) $f(x) = 2^{5x-x^2}$;
 д) $f(x) = (3x^3 + x^7)^5$;

Вариант 8.

а) $f(x) = \sqrt{2x-1}$; б) $f(x) = e^{-x^3}$; в) $f(x) = \operatorname{tg} \sqrt{x}$; г) $f(x) = \frac{\sin 5x}{x}$; д) $f(x) = \sqrt[3]{\ln(1-x)}$.

Порядок выполнения отчёта по практической работе:

1. Выполнить задания.
2. Ответить на вопросы для закрепления теоретического материала (устно).
3. Оформить отчёт по практической работе.

Образец отчёта по практической работе:

Тема.

Учебная цель.

Название практической работы.

Решение заданий практической работы.

Ответы на вопросы для закрепления теоретического материала.

Практическая работа № 40.

Исследование функций и построение графиков.

Цель:

Научиться применять производную при исследовании функций.

Учебные задачи:

1. Научиться применять производную для исследований функций на монотонность и экстремумы.
2. Научиться строить графики функций.
3. Учить рассуждать и логически мыслить.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия

Исследование функций с помощью производной

Способность производной характеризовать скорость изменения функции (а значит, и ее графика) лежит в основе исследования функций с помощью производной и построения графика.

Для возрастающей функции (рис. 3) угол наклона касательной острый, т.е. $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha > 0$, для убывающей (рис. 4) – тупой, т.е. $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha < 0$.

Можно по известному знаку производной судить о поведении функции.

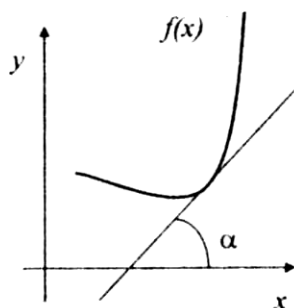


Рис. 3

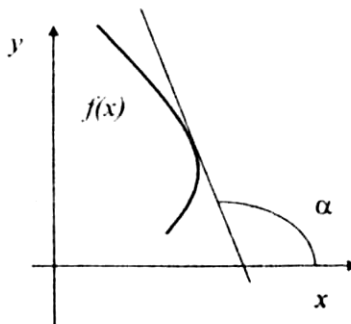


Рис. 4

Функция постоянна в каждом интервале, в котором ее производная равна нулю, возрастает в каждом интервале, где производная положительна, и убывает в тех интервалах, где производная отрицательна.

Особую роль играют так называемые критические точки из области определения функции, т.е. точки, в которых производная обращается в нуль, либо не существует.

Среди критических точек отметим точки экстремума.

Экстремумы функции

Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет максимум в точке x_1 (рис.5), если значение функции в этой точке больше, чем ее значения во всех точках, достаточно близких к x_1 , т.е. если $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$ для любых Δx , как положительных, так и отрицательных, но достаточно малых по модулю. Таким образом, $x = x_1$ – точка максимума, а $y_{\max} = f(x_1)$ – максимум функции.

Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет минимум в точке x_2 (рис.5), если значение функции в этой точке меньше, чем ее значения во всех точках, достаточно близких к x_2 , т.е. если $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$ для любых Δx , как положительных, так и отрицательных, но достаточно малых по модулю. Таким образом, $x = x_2$ – точка минимума, а $y_{\min} = f(x_2)$ – минимум функции.

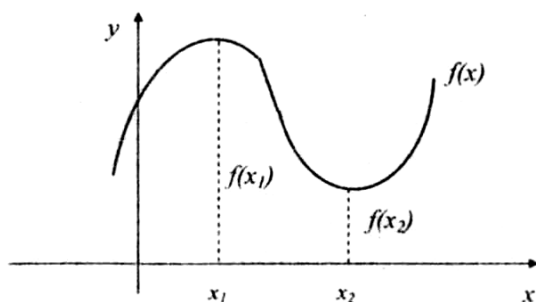


Рис.5

Для
производной следует:

исследования функции по первой

1. Найти область определения функции,
2. Найти первую производную и критические точки.
3. Отметить границы области определения и критические точки на числовой прямой.
4. Исследовать знак производной в каждом из полученных интервалов.
5. Выписать точки экстремума и вычислить экстремумы функции.

Пример 9. Найти экстремумы функции $y = (1 - x^2)^2$

Решение

1. Областью определения функции служит множество всех действительных чисел, т.е.
2. Функция имеет производную всюду, поэтому определяем критические точки из условия $f'(x) = 0$. Находим производную.

$$y' = 3(1 - x^2)^2(1 - x^2)' = 3(1 - x^2)^2(-2x) = -6x(1 - x^2)^2$$

$$y' = 0; \quad -6x(1 - x^2)^2 = 0; \quad x_1 = 0; \quad x_2 = -1; \quad x_3 = 1.$$
3. Отметим эти критические точки на числовой прямой (рис.6).

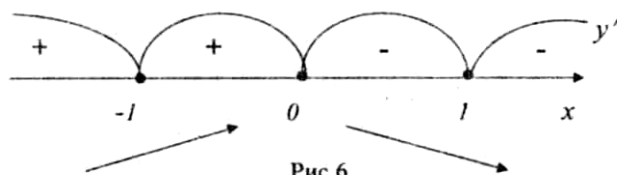


Рис.6

4. Исследуем знак производной $y' = -6x(1 - x^2)^2$ в каждом из полученных интервалов:
 $y'(-2) > 0, y'(-0,5) > 0, y'(0,5) < 0, y'(2) < 0.$
5. Точка $x = 0$ – точка максимума, так как при переходе через нее слева направо производная меняет знак с плюса на минус: $y_{\max} = y(0) = 1$.
Точки $x = -1$ и $x = 1$ не являются точками экстремума.
Можно провести исследование функции с помощью второй производной.
Если в точке $x = x_0$ первая производная равна нулю ($f'(x_0) = 0$), а вторая производная отлична от нуля, то $x = x_0$ – точка экстремума.
При этом если вторая производная в этой точке положительна

($f''(x_0) > 0$), то $x = x_0$ – точка минимума; если вторая производная в этой точке отрицательна ($f''(x_0) < 0$), то $x = x_0$ – точка максимума.

Для исследования функции на экстремум по первой и второй производной следует:

1. Найти область определения функции.
2. Найти первую производную функции и стационарные точки, т.е. точки, в которых она обращается в нуль.
3. Найти вторую производную и исследовать ее знак в каждой критической точке.
4. Выписать точки экстремума и вычислить (если нужно) экстремумы функции.

Пример 10. Найти экстремумы функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1, \quad x \in R$

Решение

1. Областью определения функции служит множество всех действительных чисел, т.е.
2. Функция имеет производную всюду, поэтому критические точки определяем из условия $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x, \quad f'(x) = 0, \quad 3x^2 - 6x = 0.$$

$$3x(x - 2) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 2.$$

3. Находим вторую производную функции $f''(x) = 6x - 6$. Исследуем знак второй производной в каждой критической точке: $f''(0) = -6 < 0$, значит, $x=0$ - точка максимума, $y_{\max} = y(0) = 1$. $f''(2) = 6 > 0$, значит, $x=2$ - точка минимума $y_{\min} = y(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 1 = -3$.

Пример. Исследовать функцию $f(x) = x^3 - 3x$ и построить ее график:

Решение:

1. $D(f) = R$.
2. Функция нечетная, т.к. $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -(x^3 - 3x) = -f(x)$. Следовательно, она симметрична относительно начала координат.

3. Точки пересечения графика с осью OX : $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0, \pm\sqrt{3} \end{cases}$;

$$\text{Точки пересечения графика с осью } OY: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

4. Исследуем функцию на монотонность и точки экстремума:

$$f'(x) = 3x^2 - 3, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0, \quad x = \pm 1$$

Функция возрастает на $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$; функция убывает на $[-1; 1]$.

$x = -1$ - точка максимума, $x = 1$ - точка минимума.

X	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	возраст.	2	убывает	-2	возраст.
		макс.		мин.	

5. Исследуем функцию на вогнутость, выпуклость и точки перегиба:

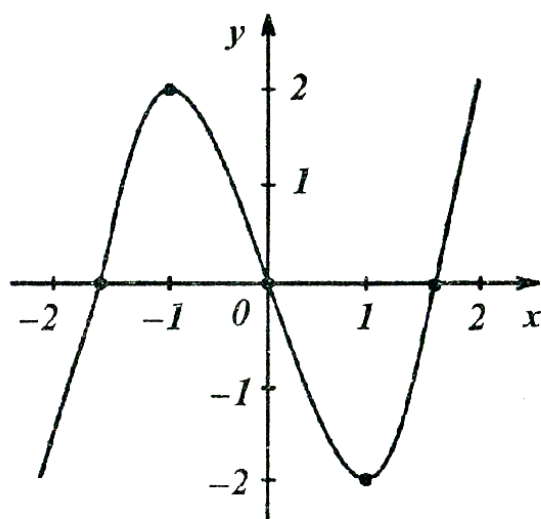
$$f''(x) = 6x, \quad f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

Функция вогнута на $[0; +\infty)$, выпукла на $(-\infty, 0]$.

$x = 0$ - точка перегиба.

X	$(-\infty; 0)$	0	$(0; +\infty)$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	Вогнута	0	выпукла
		перегиб	

6. Построим график функции:



I вариант	II вариант	III вариант
Найти интервалы монотонности функций:		
а) $y = x^2 - 6x + 5$	а) $y = 2x^2 - 4x + 5$	а) $y = -x^2 - 4x + 3$
б) $y = 2x^2 - 4x + 5$	б) $y = x^2 + x + 1$	б) $y = (x - 2)(x + 3)$
в) $y = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 7x - 8$	в) $y = x^3 + 3x^2 - 6x + 5$	в) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
Исследовать на экстремум функции:		
а) $y = x^2 - 10x + 9$	а) $y = x^3 + 9x - 1$	а) $y = x^3 + x^2 - 8x + 1$
б) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 7$	б) $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x - 2$	б) $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + 5$
в) $y = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x - 2$	в) $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 1$	в) $y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 6x + 2$
г) $y = 7x^2 - 56x + 8$	г) $y = x^2 + 2x - 3$	г) $y = 3x^2 - 6x + 5$
Исследовать функции и построить их графики		
а) $y = x(2 - x)^2$	а) $y = x^3 - 5x^2 + 8x$	а) $y = 2x^3 - 3x + 1$
б) $y = x^3 - 4x^2 - 3x + 6$	б) $y = x^3 - 6x^2 + 25$	б) $y = x^3 - 3x^2 + 6x$
в) $y = x^2 + 2x - 3$	в) $y = 2x^2 - x - 3$	в) $y = 1 - x - x^2$

Общая схема исследования функций с помощью производной

1. Нахождение области определения функции.
2. Проверка того, является ли функция четной, нечетной, периодической или эта функция – функция общего вида.
3. Определение точек пересечения с осями координат.
4. Нахождение критических точек (точек, в которых производная равна нулю или не существует).
5. Определение промежутков возрастания и убывания функции (промежутков, на которых производная положительна или отрицательна).
6. Определение экстремумов функции.

7. Исследование функции на выпуклость, вогнутость, определение точек перегиба (исследование проводится по второй производной функции).
9. Уточнение графика функции по точкам (произвести окончательное уточнение графика, в особенности на участках, где информация о нем недостаточна).

Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию:

1. Что такое интервалы монотонности?
2. Что такое $\max$ и $\min$ для функции?
3. Вспомнить алгоритм исследования функции на экстремумы.

Порядок выполнения отчёта по практической работе:

1. Выполнить задания.
2. Ответить на вопросы для закрепления теоретического материала (устно).
3. Оформить отчёт по практической работе.

Образец отчёта по практической работе:

Тема.

Учебная цель.

Название практической работы.

Решение заданий практической работы.

Ответы на вопросы для закрепления теоретического материала.

Практическая работа №41.

Задачи на отыскание наибольших и наименьших величин.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Решение прикладных экстремальных задач».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности учащихся.

ОБОРУДОВАНИЕ: инструкционно-технологические карты, таблицы производных элементарных функций, микрокалькуляторы.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. Ответить на контрольные вопросы:
 - а) Какую точку называют критической точкой функции?
 - б) Сформулируйте признак возрастания (убывания) функции.
 - в) Сформулируйте признак максимума (минимума) функции.
 - г) Опишите схему исследования функции.
2. С помощью обучающих таблиц повторить планы нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке, решения прикладных экстремальных задач и изучить образцы решенных примеров.
3. Выполнить задания для самоконтроля (в таблице).
4. Изучить условие заданий для практической работы.
5. Оформить отчет о работе.

Краткие теоретические сведения

Наибольшее и наименьшее значение функции

Наибольшим значением функции называется самое большее, а наименьшим - самое меньшее из всех ее значений.

Функция может иметь только одно наибольшее значение и только одно наименьшее значение или может не иметь их совсем.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке $a \leq x \leq b$, где она непрерывна, следует:

1. Найти экстремумы функции на данном отрезке.
2. Найти значение функции на концах отрезка: $f(a)$ и $f(b)$
3. Из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример 11. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2 \quad \text{на отрезке } [-2; 4].$$

Решение

1. Найдем экстремумы функции, для чего найдем производную функции и критические точки из условия $y' = 0$ при $x_1 = 0$, $x^2 - 2x - 3 = 0$,

$$D = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot (-3) = 16, \quad x_{1,2} = \frac{(2 \pm 4)}{2}, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 3.$$

$$y' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 - \frac{2}{3} \cdot 3x^2 - \frac{3}{2} \cdot 2x = x^3 - 2x^2 - 3x = x(x^2 - 2x - 3)$$

Отметим критические точки 1 рода $x = -1$, $x = 0$, $x = 3$, на

числовой прямой (рис.7).

Исследуем знак производной в каждом из полученных интервалов:

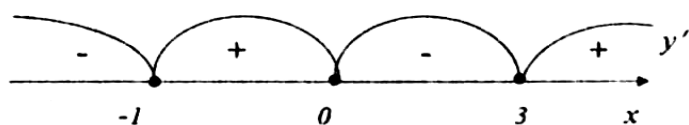


Рис.7

$$y'(-2) < 0, \quad y'(-0,5) > 0, \quad y'(1) < 0, \quad y'(4) < 0.$$

0.

Таким образом,

$$y_{\min} = y(-1) = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12};$$

$$y_{\max} = y(0) = 2;$$

$$y_{\min} = y(3) = \frac{1}{4} \cdot 81 + \frac{2}{3} \cdot 27 - \frac{3}{2} \cdot 9 + 2 = -11\frac{1}{4}.$$

1. Наименьшее и наибольшее значения функции.

Задание. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^4 - 2x^2 - 3$ на промежутке $[0; 2]$.

№ шага	План нахождения $y_{\min}$ и $y_{\max}$ на $[a; b]$	Применение плана
1	Находим производную функции	$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$
2	Находим критические точки функции	$y' = 0, \quad 4x(x^2 - 1) = 0,$ $x = 0$ или $x^2 - 1 = 0,$ $x = -1; 0; 1$ - критические точки функции
3	Выбираем критические точки, лежащие внутри $[a; b]$	$0; 1 \in [0; 2]$
4	Находим значения функции в критических точках (внутри данного отрезка) и на концах отрезка	$y(0) = -3$ $y(1) = 1 - 2 - 3 = -4$ $y(2) = 16 - 8 - 3 = 5$

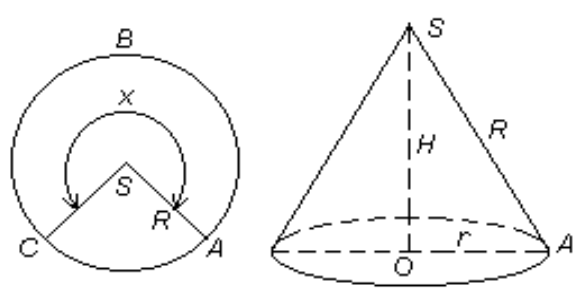
5	Из найденных значений функции выбираем наименьшее и наибольшее	$y_{\min} = y(1) = -4, y_{\max} = y(2) = 5$
---	--	---

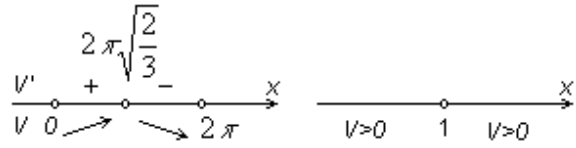
Примеры. Применяя указанный выше план, найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на промежутке $[a; b]$, если:

- 1) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3, [0; 4]$; 2) $f(x) = 3x^2 - x^3, [-1; 3]$; 3) $f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 2, [-1; 1]$; 4) $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - 4x, [0; 2]$; 5) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2, [-2; 2]$;
6) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x, \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$; 7) $f(x) = x + \cos^2 x, \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; 8) $f(x) = 2x^2 - \ln x, [1; e]$;
9) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 16}}, [-3; 3]$.

2. Геометрические задачи на нахождение оптимальных значений величин.

Задание. Из кружка жести радиуса R вырезается сектор и из оставшейся части круга делается коническая воронка. При какой величине угла вырезаемого сектора объём воронки будет наибольшим?

№ шага	План решения	Применение плана
1	Строим рабочий чертеж	
2	Записываем исходную формулу для вычисления величины, экстремальное значение которой требуется найти	$V_{\kappa} = \frac{1}{3} \pi r^2 H$
3	Вводим переменную величину x и выражаем через неё значения всех величин исходной формулы	Пусть x – величина центрального угла оставшегося сектора, тогда $ \cup ABC = Rx$ и $ \cup ABC = 2\pi r$, значит $2\pi r = Rx$ и $r = \frac{Rx}{2\pi}$. Высота воронки $H = \sqrt{R^2 - r^2} = \frac{R}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - x^2}$
4	Подставляя найденные значения величин в формулу, представляем её как функцию аргумента x	$V = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{R^2 x^2}{4\pi^2} \cdot \frac{R}{2\pi} \cdot \sqrt{4\pi^2 - x^2},$ $V = \frac{R^3}{24\pi^2} \sqrt{4\pi^2 x^2 - x^6}$
5	Задаем (по смыслу задачи) область определения функции	$0 < x < 2\pi, D(V) = (0; 2\pi)$

6	Функцию аргумента x исследуем на экстремум на найденном числовом промежутке	$V'(x) = \frac{R^3 x^3 (8\pi^2 - 3x^2)}{24\pi^2 \sqrt{4\pi^2 x^4 - x^6}}, V'(x) = 0,$ $8\pi^2 - 3x^2 = 0, x = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}, V_{max} = V(2\pi\sqrt{\frac{2}{3}})$ 
7	Записываем ответ	Величина вырезаемого угла равна $2\pi - 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 66^\circ$

ВАРИАНТЫ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ.

Вариант 1.

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 - 3x$ на отрезке $[-0,5; 0,5]$.
2. Из квадратного листа жести со стороной 12 м надо изготовить бак с квадратным основанием без крышки наибольшего объема. Найдите размеры бака и его объем.

Вариант 2.

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ на отрезке $[-1; 1]$.
2. Какой из прямоугольников с периметром $2p$ имеет наибольшую площадь?

Вариант 3.

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3$ на отрезке $[-0,5; 0,7]$.
2. Разность двух чисел равна 8. Каковы должны быть эти числа. Чтобы произведение куба первого числа на второе было наименьшим?

Вариант 4.

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ на отрезке $[0; 3]$.
2. Для стоянки машин выделили площадку прямоугольной формы, примыкающую одной стороной к стене здания. Площадку обнесли с трех сторон металлической сеткой длиной 200 м. И площадь ее при этом оказалась наибольшей. Каковы размеры площадки?

Вариант 5.

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3$ на отрезке $[-2; 0]$.
2. Из куска картона 32 см $\times$ 20 см требуется изготовить открытую сверху коробку наибольшей вместимости, вырезая по углам квадраты и затем, загибая выступы для образования боковых сторон коробки. Найдите объем коробки.

Вариант 6.

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 - 3x$ на отрезке $[-1,5; 2]$.
2. Требуется сделать коробку, объем которой должен равняться 108 см^3 . Коробка открыта сверху и имеет квадратное дно. Каковы должны быть ее размеры, чтобы на ее изготовление пошло наименьшее количество материала?

Вариант 7.

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ на отрезке $[-3; 5]$.
2. На странице книги печатный текст должен занимать (вместе с промежутками между строк) 160 см^2 . Ширина полей на странице слева и справа должна быть равна 2 см, а сверху и снизу – 5 см. Если принимать во внимание только экономию бумаги, то каковы должны быть наиболее выгодные размеры страницы?

Вариант 8.

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3$ на отрезке $[0; 4]$.
2. Материальная точка совершает прямолинейное движение по закону $s(t) = 5t + 2t^2 - \frac{2}{3}t^3$, где t – время в секундах, s – путь в метрах. В какой момент времени t скорость движения точки будет наибольшей и какова величина этой наибольшей скорости?

Практическая работа № 42.

Нахождение первообразной функции. Вычисление неопределенного интеграла.

Цель: Сформировать навыки простейшего интегрирования с помощью таблицы интегралов.

Учебные задачи:

1. Закрепить умение находить неопределенные интегралы для элементарных функций.
2. Учить рассуждать и логически мыслить.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия

Таблица интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$	7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \text{ctgx} + C$	13. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \text{arctgx} + C$
2. $\int dx = x + C$	8. $\int \text{tg} x dx = \ln \cos x + C$	14. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + C$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	9. $\int \text{ctg} x dx = \ln \sin x + C$	15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	10. $\int e^x dx = e^x + C$	16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$	11. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg} x + C$	12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctgx} + C$	

Действие вычисления неопределенного интеграла данной функции называется интегрированием данной функции.

Очевидно, что действие интегрирования обратное по отношению дифференцированию.

Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию:

1. Что такое неопределенный интеграл?
2. Как проверить результаты интегрирования?
3. Сколько первообразных может быть у одной функции? Как называется это свойство?

Задания для практического занятия:

1 вариант	2 вариант
<i>1. Вычислить неопределенный интеграл:</i>	
1) $\int 4 \sin x dx$; 2) $\int 6 \cos x dx$; 3) $\int \left(-\frac{9}{\cos^2 x} \right) dx$; 4) $\int \left(-\frac{15}{x^2} \right) dx$; 5) $\int \left(x^6 + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$; 6) $\int (x^2 + 6x) dx$;	1) $\int 5 \sin x dx$; 2) $\int 8 \cos x dx$; 3) $\int \left(-\frac{16}{\sin^2 x} \right) dx$; 4) $\int \frac{20}{x^2} dx$; 5) $\int \left(x^7 - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$; 6) $\int (8x - 4x^3) dx$.
<i>2. Вычислите интеграл</i>	
1) $\int \frac{1}{2} \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) dx$; 2) $\int e^{2x+4} dx$; 3) $\int 3 \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) dx$; 4) $\int \left(-\frac{3}{x} + e^{5x} - \cos 10x \right) dx$;	1) $\int \frac{1}{3} \sin \left(4x - \frac{\pi}{6} \right) dx$; 2) $\int (5x + 8)^3 dx$; 3) $\int 6 \cos \left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3} \right) dx$; 4) $\int \left(-\frac{2}{x} + e^{6x-1} - \sin 3x \right) dx$.

Инструкция по выполнению практического занятия

Для решения практических заданий рассмотрите пример.

Пример 1. Пользуясь таблицей основных интегралов и свойствами неопределенного интеграла, найти интегралы.

$$a) \int \left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}} - \frac{3x^3+1}{x^4} + 2\sqrt[6]{x^5} \right) dx; \quad б) \int \left(\frac{5}{11x^2+2} + 3 \cdot 5^x + \frac{16-x^2}{4+x} \right) dx.$$

Решение.

$$\begin{aligned}
 a) \int \left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}} - \frac{3x^3+1}{x^4} + 2\sqrt[6]{x^5} \right) dx &= \int \left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}} - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^4} + 2x^{5/6} \right) dx = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{используем свойства 3 и 4 и разобьем интеграл от суммы} \\ \text{функции на сумму интегралов, при этом постоянные} \\ \text{множители вынесем за знак интегралов} \end{array} \right\} = \\
 &= 5 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+7}} - 3 \int \frac{dx}{x} - \int x^{-4} dx + 2 \int x^{5/6} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{используем табличные} \\ \text{интегралы 12, 4, 3} \end{array} \right\} = \\
 &= 5 \ln |x + \sqrt{x^2+7}| - 3 \ln |x| - \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + 2 \cdot \frac{x^{5/6+1}}{5/6+1} + C = \\
 &= 5 \ln |x + \sqrt{x^2+7}| - 3 \ln |x| + \frac{1}{3x^3} + \frac{12}{11} x^{11/6} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& б) \int \left(\frac{5}{11x^2 + 2} + 3 \cdot 5^x + \frac{16 - x^2}{4 + x} \right) dx = 5 \int \frac{dx}{11 \left(x^2 + \frac{2}{11} \right)} + 3 \int 5^x dx + \\
& + \int \frac{(4 - x)(4 + x)}{4 + x} dx = \frac{5}{11} \int \frac{dx}{x^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{11}} \right)^2} + 3 \int 5^x dx + 4 \int dx - \int x dx = \\
& = \left\{ \begin{array}{l} \text{используем формулы} \\ 13, 5, 2, 3 \text{ таблицы интегралов} \end{array} \right\} = \frac{5}{11} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{11}}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{11}}} + 3 \cdot \frac{5^x}{\ln 5} + \\
& + 4x - \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{5}{\sqrt{22}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{11}{2}} x + 3 \frac{5^x}{\ln 5} + 4x - \frac{x^2}{2} + C.
\end{aligned}$$

Порядок выполнения отчёта по практической работе:

1. Выполнить задания.
2. Ответить на вопросы для закрепления теоретического материала (устно).
3. Оформить отчёт по практической работе.

Образец отчёта по практической работе:

Тема.

Учебная цель.

Название практической работы.

Решение заданий практической работы.

Ответы на вопросы для закрепления теоретического материала.

Практическая работа № 43.

Вычисление определенного интеграла. Площадь криволинейной трапеции.

Цель работы: закрепить навыки применения определенного интеграла к решению прикладных задач.

Выполняя данную работу, студент **должен знать:**

- формулы табличных интегралов;
- формулу Ньютона – Лейбница
- формулу пути, пройденного точкой;
- формулу площади плоской фигуры.

уметь:

- с помощью формул, перечисленных выше, решать задачи прикладного характера.

Последовательность выполнения:

задания выполнять желательно в указанном порядке.

Методические указания:

ЗАДАНИЕ 1 Решение задачи прикладного характера по нахождению пути, пройденного точкой

При решении задачи применить формулу пути, пройденного точкой: $S = \int_{t_1}^{t_2} v dt$.

ЗАДАНИЕ 2,3 Решение задачи прикладного характера по нахождению площади плоской фигуры.

Применить формулу площади плоской фигуры: $S = \int_a^b f(x) dx$.

Теоретический материал

Таблица первообразных:

$f(x)$	k	x^n	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	a^x	e^x
$F(x)$	kx	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\ln x$	$2\sqrt{x}$	$-\cos x$	$\sin x$	$\operatorname{Tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$\frac{a^x}{\ln a}$	e^x

Критерии оценивания:

На оценку «5» - необходимо выполнить все задания работы с грамотным оформлением условий, чертежей и решений задач;

На оценку «4» - выполнить задания №1, №2; №3(а,в);

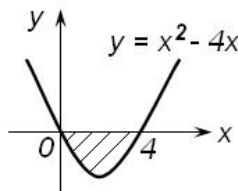
На оценку «3» - выполнить задания №1; №2; №3(а,б).

Задания

1 вариант

1. Определить путь S , пройденный точкой за время $t = 3$ с от начала движения, если скорость материальной точки, движущейся прямолинейно, равна $v(t) = 3t^4 - 2t + 3$.

2. Вычислить площадь фигуры, изображенной на рисунке



3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями и сделать чертеж:

а) $y = 4 - x^2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$;

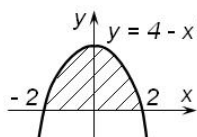
б) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$;

в) $y = x^2$, $y = 2x$.

2 вариант

1. Определить путь S , пройденный точкой за время $t = 2$ с от начала движения, если скорость материальной точки, движущейся прямолинейно, равна $v(t) = 3t^4 + 5t - 4$.

2. Вычислить площадь фигуры, изображенной на рисунке



3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями и сделать чертеж:

а) $y = 4x - x^2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$;

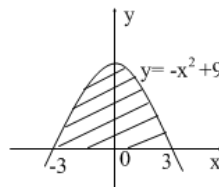
б) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$

в) $y = x^2 - 1$, $y = 2x$

3 вариант

1. Определить путь S , пройденный точкой за время $t = 1$ с от начала движения, если скорость материальной точки, движущейся прямолинейно, равна $v(t) = 4t^3 + 8t + 1$.

2. Вычислить площадь фигуры, изображенной на рисунке



3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями и сделать чертеж:

а) $y = 3x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$.

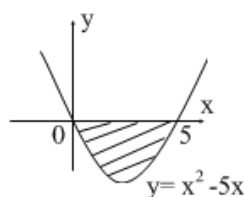
б) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \pi$

в) $y = \frac{1}{3}x + 2$, $y = \frac{1}{9}x^2$

4 вариант

1. Определить путь S , пройденный точкой за время $t = 4$ с от начала движения, если скорость материальной точки, движущейся прямолинейно, равна $v(t) = 6t^3 + 2t - 2$.

2. Вычислить площадь фигуры, изображенной на рисунке



3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями и сделать чертеж:

а) $y = x^2 + 2x + 1$, $y = 0$, $x = 3$, $x = 1$.

б) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$

в) $y = 2 - 0,5x$, $y = 5 - x$, $y = 0$

Практическая работа № 44-45.

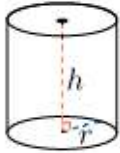
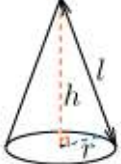
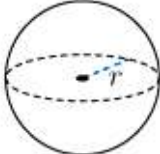
Вычисление объема многогранников, объема тел вращения.

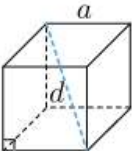
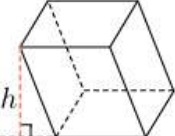
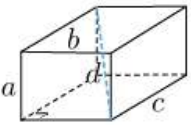
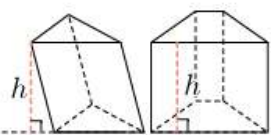
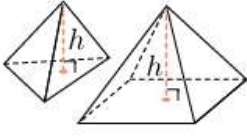
Цель: научиться применять на практике формулы для вычисления различных объемов.

Учебные задачи:

1. Закрепить умение находить объемы многогранников и круглых тел.
2. Развивать умения систематизировать и анализировать информацию, делать выводы, умение понимать и использовать математические средства наглядности для решения прикладных задач.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия

 Цилиндр $V = \pi r^2 h$ r - радиус основания h - высота	$S = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} =$ $= 2\pi r^2 + 2\pi r h$	
 Конус $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$	$S = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} =$ $= \pi r^2 + \pi r l$ l - образующая	$l = \sqrt{r^2 + h^2}$
 Шар $V = \frac{4}{3} \pi r^3$	$S = 4\pi r^2$	

 Куб	$V = a^3$	$S = 6a^2$ $d = a\sqrt{3}$ d - диагональ
 Параллелепипед	$V = S_{\text{осн}} h$ h - высота	
 Прямоугольный параллелепипед	$V = abc$	$S = 2ab + 2bc + 2ac$ $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
 Призма	$V = S_{\text{осн}} h$	$S = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$
 Пирамида	$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h$	$S = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$

Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию:

1. Что такое объем и какими свойствами он обладает?
2. Чему равен объем цилиндра, конуса, шара?
3. Как найти объем призмы, пирамиды, прямоугольного параллелепипеда, куба?

Задания для практического занятия:

Вариант 1	Вариант 2
<i>Решить задачу:</i>	
1) Определить объем прямоугольного параллелепипеда по 3-м его измерениям:	
$a = 8, b = 1,3, c = 6$	$a = 18, b = 0,1, c = 2$
2) Ребро свинцового куба равно 4 см. Вычислить массу свинцового куба, если $\rho_{\text{св}} = 11400 \text{ кг/см}^3$.	

$A = 16$	$A = 24$
3) Боковая поверхность правильной треугольной пирамиды 18 дм. Найти объем этой пирамиды, если высота боковой грани 4 дм.	3) Диагональ основания правильной четырехугольной пирамиды 1,8 м, высота 4,5 м. Найти объем.
4) Образующая конуса a см, составляет с плоскостью основания угол b° . Определить объем конуса, если:	
$a = 3, b = 45^\circ$	$a = 4, b = 30^\circ$

Инструкция по выполнению практического занятия

1. Познакомиться с конспектами лекций и краткой теоретической справкой
2. Ответить устно на контрольные вопросы.
3. Используя конспекты лекций, решить практические задания.

Порядок выполнения отчёта по практической работе:

1. Выполнить задания.
2. Ответить на вопросы для закрепления теоретического материала (устно).
3. Оформить отчёт по практической работе.

Образец отчёта по практической работе:

Тема.

Учебная цель.

Название практической работы.

Решение заданий практической работы.

Ответы на вопросы для закрепления теоретического материала.

Практическая работа № 46.

Цель: сформировать навыки вычисления площади поверхности многогранников

Учебные задачи:

1. Отработать умения вычисления площади поверхности; начертательные навыки при изображении геометрического тела и его развёртки.
2. Развивать умения систематизировать и анализировать информацию, делать выводы, умение понимать и использовать математические средства наглядности для решения прикладных задач.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия

Формулы для вычисления площади поверхности правильных многогранников.

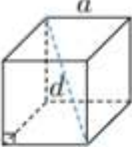
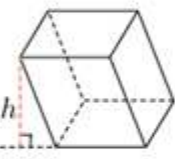
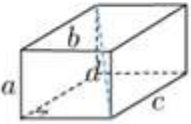
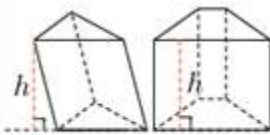
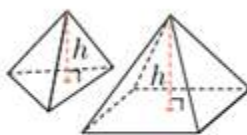
$$S_{\text{тетр.}} = 4 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = a^2 \sqrt{3}$$

$$S_{\text{окт.}} = 8 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 2a^2 \sqrt{3}$$

$$S_{\text{икос.}} = 20 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 5a^2 \sqrt{3}$$

$$S_{\text{гекс.}} = 6a^2$$

$$S_{\text{дод.}} = 12 \cdot \frac{l}{2} Pr = 6Pr.$$

 Куб	$V = a^3$	$S = 6a^2$ $d = a\sqrt{3}$ d - диагональ
 Параллелепипед	$V = S_{\text{осн}}h$ h - высота	
 Прямоугольный параллелепипед	$V = abc$	$S = 2ab + 2bc + 2ac$ $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
 Призма	$V = S_{\text{осн}}h$	$S = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$
 Пирамида	$V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}h$	$S = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$

Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию:

1. Что такое многогранники?
2. Виды многогранников.
3. Что такое призма и пирамида?
4. Какие виды правильных многогранников вы знаете?

Задания для практического занятия:

Задача 1. Дана правильная четырехугольная пирамида со стороной основания 2 см и высотой боковой грани 6 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

По данным развертки

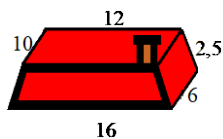
1. Сделать чертеж многогранника
2. Сделать модель многогранника
3. Найти полную поверхность

РАЗВЕРТКА	ЧЕРТЕЖ	ПОЛНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ
	?	$S_{\text{осн}} - ?$ $S_{\text{бок}} - ?$ $S_{\text{пол}} - ?$
РАЗВЕРТКА	ЧЕРТЕЖ	ПОЛНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ
	?	$S_{\text{осн}} - ?$ $S_{\text{бок}} - ?$ $S_{\text{пол}} - ?$

Задача 2. Вычислите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды, если ее высота 9см, а апофема равна 18см.

Задача 3. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания относятся как 7:24, а площадь диагонального сечения равна 50 кв. см. Вычислите площадь боковой поверхности.

Задача 4



Сколько примерно листов железа размером 2х0,8 м (шифера размером 1,5х1) (черепицы, размером 0,4х0,4) необходимо для покрытия крыши? Чему равны затраты на его приобретение?

Инструкция по выполнению практического занятия

1. Ответить устно на контрольные вопросы и решить практические задания.

Порядок выполнения отчёта по практической работе:

1. Выполнить задания .
2. Ответить на вопросы для закрепления теоретического материала (устно).
3. Оформить отчёт по практической работе.

Образец отчёта по практической работе:

Тема.

Учебная цель.

Название практической работы.

Решение заданий практической работы.

Ответы на вопросы для закрепления теоретического материала

Практическая работа № 47.

Решение рациональных, иррациональных, показательных уравнений.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: организовать деятельность обуч-ся по переводу своих знаний от усвоения отдельных фактов и понятий к их обобщению в целостную систему знаний; определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обуч-ся.

ОБОРУДОВАНИЕ: инструкционно-технологические карты, справочные пособия по алгебре, микрокалькуляторы.

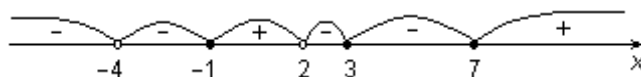
ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. Выполнить обучающий тест и проверить свои результаты по таблице ответов.
2. Изучить условие заданий для практической работы.
3. Оформить отчет о работе.

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

ПРИМЕР 1. Решите неравенство $\frac{(x-3)^2(x-7)^3(x+1)}{(x-2)(x+4)^4} \geq 0$.

РЕШЕНИЕ. Это **рациональное** неравенство решим **методом интервалов**. Отметим на числовой прямой «жирными» точками нули числителя (-1 ; 3 и 7) и «прозрачными» – нули знаменателя (-4 и 2). Если бы заданное неравенство было строгим, нужно было бы все нули сделать «прозрачными». Эти точки разобьют числовую прямую на 6 интервалов:



Выясним знак данной дроби на каждом из этих интервалов, используя пробные числа, принадлежащие интервалам.

Можно поступать иначе. Для этого в выражении в каждом из множителей переменная x должна иметь знак «+» ($(x-2)$, а не $(2-x)$; $(x-7)$, а не $(7-x)$). Этого всегда можно добиться, умножая неравенство на -1 и меняя одновременно его знак столько раз, сколько надо. Отметив нули выражения на числовой оси, справа налево расставим знаки по следующему правилу: сначала «+», меняем знак на нечетной степени и сохраняем его на четной.

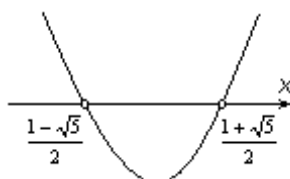
Теперь остается выписать ответ – промежутки, на которых поставлен знак «+», так как знак данного неравенства $\geq$. Важно не забыть $x = 3$.

ОТВЕТ: $[-1; 2) \cup \{3\} \cup [7; +\infty)$.

ПРИМЕР 2. Решите неравенство $x^2 - x - 1 > 0$.

РЕШЕНИЕ. Это **квадратное** неравенство можно решить методом интервалов, но проще – **графически**. Рассмотрим функцию, заданную уравнением $y = x^2 - x - 1$. Графиком ее является парабола. Заметим, что для нас совершенно не важны точные характеристики параболы (где находится ось, пересечение с Oy и т. п.) Достаточно знать, что ее ветви направлены вверх ($a > 0$) и что она пересекает ось Ox в двух точках, являющихся корнями

уравнения $x^2 - x - 1 = 0$, $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Выполним схематический рисунок:



Из рисунка видно, что квадратичная функция принимает положительные значения вне отрезка, соединяющего ее корни.

ОТВЕТ: $\left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Вариант 2

1. Решите неравенства:

а) $5(x-1) - x(7-x) < x^2$;

б) $\frac{x^2}{10} + 2 > \frac{7x}{10}$;

в) $(x+8)^2(10-x)^3 > 0$.

2. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \frac{x-9}{4} - x < \frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3}, \\ 2-x > 2x-8. \end{cases}$$

Вариант 4

1. Решите неравенства:

а) $5 - \frac{x}{3} < \frac{7}{2} - \frac{4x+1}{8}$;

б) $2x(x-1) < 3(x+1)$;

в) $\frac{(x+5)^3(x-4)^4}{(7-x)^5} \leq 0$.

2. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 3,3 - 3(1,2 - 5x) > 0,6(10x + 1), \\ 1,6 - 4,5(4x - 1) < 2x + 26,1. \end{cases}$$

Вариант 6

1. Решите неравенства:

а) $(x+1)^2 - (x+4)^2 \leq (6-x)^2 - (3-x)^2$;

б) $4x - 2x^2 - 5 \geq 0$;

в) $\frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 + 3x + 2} \leq 0$.

2. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} x(x-1) - (x^2 - 10) < 1 - 6x, \\ 3,5 - (x - 1,5) < 6 - 4x. \end{cases}$$

ТЕСТ 3. Теорема Виета.

1. Найдите сумму корней уравнения $x^2 + 18x - 11 = 0$:
1) 18; 2) 11; 3) -18; 4) 1.
2. Найдите произведение корней уравнения $x^2 + 27x - 24 = 0$:
1) 27; 2) -24; 3) 1; 4) 24.
3. Найдите сумму корней уравнения $5x^2 + 10x - 3 = 0$:
1) 10; 2) -10; 3) -2; 4) 2.
4. Найдите произведение корней уравнения $3x^2 - 16x + 9 = 0$:
1) 3; 2) 9; 3) -9; 4) 16.
5. В уравнении $x^2 + px - 16 = 0$ один из корней равен 8. Найдите второй корень и коэффициент p :
1) $x_2 = 2, p = -10$; 2) $x_2 = -2, p = 6$; 3) $x_2 = -2, p = -6$; 4) $x_2 = 2, p = 10$.
6. Один из корней уравнения $z^2 + 7z + q = 0$ равен -2. Найдите второй корень и коэффициент q :
1) $z_2 = -5, q = 10$; 2) $z_2 = 5, q = -10$; 3) $z_2 = 5, q = 10$; 4) $z_2 = -5, q = -10$.
7. Найдите подбором корни уравнения $x^2 - 15x + 56 = 0$:
1) 4, 14; 2) -7, 8; 3) 5, 10; 4) 7, 8.

ТЕСТ 4. Дробно-рациональные уравнения.

1. Какое из уравнений является дробно-рациональным:
1) $\frac{x^2}{3} - 4x + 1 = 0$; 2) $\frac{2x^2 - 3x}{13} = 1$; 3) $\frac{x-3}{2x+1} = \frac{4}{x}$; 4) $2x + 8 = 14(7-x)$?
2. Решите уравнение $\frac{x^2}{2} + \frac{x-1}{6} = \frac{1}{2}$:
1) 2; 2) -1; 3) 1; 4) 3.
3. Решите уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-4} = 0$:
1) -2; 2) 5; 3) 2; 4) -1.
4. Найдите корни уравнения $\frac{5}{x^2 + 6} = \frac{1}{x}$:
1) 1, 5; 2) -2, 3; 3) -3, 2; 4) 2, 3.
5. Определите, при каком значении x значение функции $y = \frac{3x+1}{x+5}$ равно 2:
1) 4; 2) 3; 3) 8; 4) 9.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Вариант 1.

1. Решите уравнение: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2 - 2}{x^2 + x}$.

2. Решите неравенства:

а) $(x-1)(x-2)+3 > (x-2)(x-5)+5$; б) $x^2 + 9 < 0$.

Вариант 2.

1. Решите уравнение: $\frac{x^2 - 2x - 5}{(x-3)(x-1)} + \frac{1}{x-3} = 1$.

2. Решите неравенства:

а) $(x+7)^2 - 4 > (x+6)^2 - 3$; б) $4x^2 + 12x + 9 \leq 0$.

Вариант 3.

1. Решите уравнение: $\frac{7}{x+1} + \frac{x+4}{2x-2} = \frac{3x^2 - 38}{x^2 - 1}$.

2. Решите неравенства:

а) $(x+1)^2 - (x+4)^2 \leq (6-x)^2 - (3-x)^2$; б) $4x - 2x^2 - 5 \geq 0$.

Вариант 4.

1. Решите уравнение: $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$.

2. Решите неравенства:

а) $(4-x)^2 - (x+6)^2 \geq (x+5)^2 - (2-x)^2$; б) $\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{3} > \frac{3x-10}{4}$.

Вариант 5.

3. Решите уравнение: $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$.

4. Решите неравенства:

а) $5(x-1) - x(7-x) < x^2$; б) $\frac{x^2}{10} + 2 > \frac{7x}{10}$.

Вариант 6.

1. Решите уравнение: $4x^4 + 11x^2 - 3 = 0$.

2. Решите неравенства:

а) $\frac{3-2x}{5} + 8 > \frac{5x+2}{2} - x$; б) $x(x+1) > 2(1-2x-x^2)$.

Вариант 7.

3. Решите уравнение: $3x^4 - 4x^2 + 1 = 0$.

4. Решите неравенства:

а) $5 - \frac{x}{3} < \frac{7}{2} - \frac{4x+1}{8}$; б) $2x(x-1) < 3(x+1)$.

Вариант 8.

1. Решите уравнение: $\frac{3x-6}{(x-1)(x+2)} = \frac{3x}{x-1} - \frac{2x}{x+2}$.

2. Решите неравенства:

а) $(x-3)^2 < x(x+2)+3$; б) $-2x^2 + 4x - 5 \leq 0$.

Пр-19.

Тест №1		Тест №2		Тест №3		Тест №4	
Номер задания	Номер правильного ответа	Номер задания	Номер правильного ответа	Номер задания	Номер правильного ответа	Номер задания	Номер правильного ответа
1	4	1	3	1	3	1	3
2	3	2	3	2	2	2	3
3	2	3	1	3	3	3	3
4	2	4	4	4	1	4	4
5	1	5	2	5	3	5	4
6	2	6	4	6	1		
				7	4		

Практическая работа № 48-49.

Решение логарифмических, тригонометрических уравнений.

Цель работы:

- 1) отработать навыки действий с логарифмами;
- 2) закрепить навыки решения логарифмических уравнений и неравенств методами:

- потенцирования;
- по определению;
- метод замены переменной;
- логарифмирования.

Выполняя данную работу, студент *должен*

знать:

- свойства логарифмов;
- свойства логарифмической функции;
- основные методы решения уравнений и неравенств.

уметь:

- вычислять значения логарифмических выражений;
- выполнять действия на преобразования логарифмических выражений;
- применять методы решения уравнений и неравенств.

Последовательность выполнения:

задания выполнять желательно в указанном порядке.

Методические указания:

ЗАДАНИЕ 1 Вычисление и преобразование логарифмических выражений.

При вычислении и преобразовании логарифмических выражений в основу решения брать основные свойства логарифмов.

ЗАДАНИЕ 2 Нахождение области определения функции.

Учитывать свойства логарифмической функции при нахождении области определения функции.

ЗАДАНИЕ 3 Решение уравнений.

При решении логарифмических уравнений воспользоваться методами:

- потенцирования;
- по определению;
- метод замены переменной;
- логарифмирования.

ЗАДАНИЕ 4 Решение неравенств.

Воспользоваться свойством логарифмической функции $y = \log_a x$

- при $0 < a < 1$, функция убывает $\Rightarrow$ знак неравенства меняется на противоположный;
- при $a > 1$, функция возрастает $\Rightarrow$ знак неравенства не меняется.

ЗАДАНИЯ 5 Решение системы уравнений.

При решении систем уравнений воспользоваться методом подстановки.

Свойства логарифмов

$$b^{\log_b a} = a \quad \log_c a + \log_c b = \log_c (a \cdot b)$$

$$\log_a a = 1 \quad \log_c a - \log_c b = \log \left(\frac{a}{b} \right)$$

$$\log_a 1 = 0 \quad \log_c a^k = k \log_c a$$

$$\log_a a^m = m \quad \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

Критерии оценивания:

На оценку «5» - выполнить все задания;

На оценку «4» - выполнить задания №1(б, в,г), №2; №3(а,б,в,г); № 4(б,в);

На оценку «3» - выполнить задания №1 (два по выбору); №2(один по выбору); №3(а,б,в),
№ 4(а,в)

Задания:

1 вариант

1. Вычислить:

а) $\log_3 27 - \log_{\frac{1}{7}} 7$

б) $2^{1+\log_2 5}$

в) $\lg 4 + 2 \lg 5$

г) $\log_5 \sqrt{10} - \log_5 \sqrt{2}$

2. Найти область определения функции:

а) $y = \log_2(3x - 15)$

б) $y = \log_{0,3}(x^2 - 6x + 5)$

3. Решить уравнения:

а) $\log_5(x + 10) = 2$

б) $\log_7(3x + 4) = \log_7(5x + 8)$

в) $\log_5(x + 1) + \log_5(x - 1) = \log_5 8$

г) $\log_2^2 x - 5 \log_2 x + 6 = 0$

4. Решить неравенства:

а) $\log_3(x + 1) < -2$

б) $\log_{\frac{1}{3}}(x - 1) \geq -2$

в) $\log_{\frac{1}{5}}(3x - 5) > \log_{\frac{1}{5}}(x + 1)$

5. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ \log_2(2x + y) = 3 \end{cases}$$

2 вариант

1. Вычислить:

а) $\log_2 16 + \log_{\frac{1}{3}} 9$

б) $5^{\log_5 10 - 1}$

в) $\log_6 9 + 2 \log_6 2$

г) $\lg \sqrt{30} - \lg \sqrt{3}$

2. Найти область определения функции:

а) $y = \log_4(-2x - 14)$

б) $y = \log_3(x^2 - 2x - 3)$

3. Решить уравнения:

- а) $\log_3(x-12) = 2$
 б) $\log_3(5x+3) = \log_3(7x+5)$
 в) $\log_2(4-x) + \log_2(1-2x) = \log_2 9$
 г) $\lg^2 x - 3 \lg x - 4 = 0$

4. Решить неравенства:

- а) $\log_2(x-5) \leq 2$
 б) $\log_{\frac{1}{2}}(2x+1) > -2$
 в) $\log_{0,3}(2x+5) \geq \log_{0,3}(x+1)$

5. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x + y = -10 \\ \log_3(3y - x) = 2 \end{cases}$$

3 вариант

1. Вычислить:

- а) $\log_5 125 - \log_{\frac{1}{2}} 4$
 б) $3^{3 \log_3 2}$
 в) $3 \log_7 2 - \log_7 56$
 г) $\log_6 \sqrt[4]{5} - \log_6 \sqrt[4]{30}$

2. Найти область определения функции:

- а) $y = \log_9(-4x + 16)$
 б) $y = \log_{0,2} \left(\frac{1+2x}{x+3} \right)$

3. Решить уравнения:

- а) $\log_4(4x-2) = 2$
 б) $\log_6(2x+9) = \log_6(13-x)$
 в) $\log_3(x-2) + \log_3(x+6) = \log_3 9$
 г) $\log_3^2 x - 3 \log_3 x + 2 = 0$

4. Решить неравенства:

- а) $\log_8(4-2x) \geq 2$
 б) $\log_{\frac{2}{3}}(2-5x) < -2$
 в) $\log_{0,2}(3x-1) \geq \log_{0,2}(3-x)$

5. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + y = 3 \\ \log_3(5x + 4y) = \log_3(y + 5) \end{cases}$$

4 вариант

1. Вычислить:

$$a) \log_3 81 - \log_{\frac{1}{4}} 64$$

$$б) 7^{2 \log_7 6}$$

$$в) 3 \log_{\frac{1}{2}} 2 + \log_{\frac{1}{2}} 0,25$$

$$г) \log_3 \sqrt[3]{2} - \log_3 \sqrt[3]{54}$$

2. Найти область определения функции:

$$a) y = \log_3(5x + 35)$$

$$б) y = \log_2 \left(\frac{2x+4}{x-3} \right)$$

3. Решить уравнения:

$$a) \log_3(2x - 1) = 2$$

$$б) \log_5(x + 1) = \log_5(4x - 5)$$

$$в) \log_2(x - 5) + \log_2(x + 2) = \log_2 8$$

$$г) 2 \log_3^2 x - 7 \log_3 x + 3 = 0$$

4. Решить неравенства:

$$a) \log_3(x + 2) < 3$$

$$б) \log_{\frac{1}{5}}(4 - 3x) \geq -1$$

$$в) \log_{0,7}(2 - x) \leq \log_{0,7}(3x + 6)$$

5. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} y - 2x = 2 \\ \log_5(y - x) = \log_5(x + 2) \end{cases}$$

Цель: формирование навыков решения тригонометрических уравнений.

Учебные задачи:

1. Научить различать различные виды тригонометрических уравнений, подбирать нужный алгоритм решения тригонометрического уравнения.
2. Учить рассуждать и логически мыслить.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия

$$\sin x = a \Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = a \Leftrightarrow x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

При $|a| > 1$ уравнения $\sin x = a$ и $\cos x = a$ корней не имеют!

Если правая часть уравнения — отрицательное число, то следует воспользоваться свойствами соответствующих обратных тригонометрических функций, тогда:

$$\left. \begin{aligned} \sin x = -a &\Leftrightarrow x = (-1)^{n+1} \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z} \\ \cos x = -a &\Leftrightarrow x = \pm(\pi - \arccos a) + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z} \end{aligned} \right\} \text{ при } |a| \leq 1!$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x = -a &\Leftrightarrow x = -\operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z} \\ \operatorname{ctg} x = -a &\Leftrightarrow x = \pi - \operatorname{arcctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z} \end{aligned}$$

Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию:

1. Назовите общее решение простейших тригонометрических уравнений.
2. При каком значении a уравнения $\sin x = a$ и $\cos x = a$ не имеют корней?

Задания для практического занятия:

1 вариант	2 вариант
<i>1. Решите тригонометрические уравнения:</i>	
1) $\sin x - \frac{1}{2} = 0$; 2) $2 \cos x - \sqrt{3} = 0$; 3) $2 \cos x - 1 = 0$; 4) $\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$; 5) $\operatorname{ctg} 3x = 1$; 6) $\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$; 7) $\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$;	1) $\cos x - \frac{1}{2} = 0$; 2) $2 \sin x - \sqrt{3} = 0$; 3) $2 \sin x - 1 = 0$; 4) $\sqrt{3} \operatorname{ctg} x + 1 = 0$; 5) $\operatorname{tg} 2x = 1$; 6) $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 7) $\operatorname{ctg}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$.
<i>2. Решить уравнение, сделав подстановку</i>	
1) $2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$; 2) $2 \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{ctg} x = 5$;	1) $2 \cos^2 x + 5 \cos x + 2 = 0$; 2) $3 \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{ctg} x = 8$.
<i>3. Решить уравнение методом разложения на множители</i>	
1) $5 \sin x + 3 \sin 2x = 0$; 2) $\sin 7x - \sin x = 0$;	1) $7 \cos x - 4 \sin 2x = 0$; 2) $\cos 5x + \cos x = 0$.
<i>4. Решите уравнение, упростив левую часть:</i>	
1) $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $2 \sin^2 x \cos 2x = 1$;	1) $\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sin 3x \cdot \cos 3x = -\frac{1}{2}$;

Инструкция по выполнению практического занятия

1. Познакомиться с конспектами лекций и краткой теоретической справкой
2. Ответить устно на контрольные вопросы.
3. Используя конспекты лекций, решить практические задания.

Порядок выполнения отчёта по практической работе:

1. Выполнить задания 1-3.
2. Ответить на вопросы для закрепления теоретического материала (устно).
3. Оформить отчёт по практической работе.

Образец отчёта по практической работе:

Тема.

Учебная цель.

Название практической работы.

Решение заданий практической работы.

Ответы на вопросы для закрепления теоретического материала.

Практическая работа № 50-51.

Решение неравенств и систем неравенств, решение неравенств методом интервалов.

Цель: обобщение изученного материала, вспомнить алгоритм решения неравенств методом интервалов.

Метод интервалов – это алгоритм, предназначенный для решения сложных неравенств вида $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$.

Алгоритм:

1. Решить уравнение $f(x) = 0$.
2. Отметить все полученные корни на координатной прямой. Получим несколько интервалов.
3. Выяснить знак (плюс или минус) функции $f(x)$ на самом правом интервале.
4. Отметить знаки на остальных интервалах. Применяя принцип чередования знаков.
5. Запишем ответ.

Практическое задание

Решите неравенства, применяя метод интервалов:

1. $(x - 2)(x + 7) < 0$
2. $(x + 9)(x - 3)(1 - x) < 0$
3. $x(2x + 8)(x - 3) > 0$
4. $(x + 1)(x + 6)(x - 4) \leq 0$
5. $(x - 4x^2)(x - 1) > 0$
6. $(x + 5)(x - 7)(3x - 1) > 0$
7. $\frac{x+3}{x-4} < 2$
8. $\frac{x^2-4}{2x+1} \leq 0$
9. $\frac{x^2+2x-3}{2x-3} \geq 0$
10. $\frac{(x-6)(x-8)}{2x-7} < 0$
11. $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} \leq 0$
12. $\frac{54-6x^2}{4x+7} < 0$
13. $\frac{(2x-1)(x^2-x-2)}{3-x} < 0$

1. Определите промежутки непрерывности функции

а) $f(x) = x^3 + 4x$

б) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{3x + x^2}$

2. Решение неравенств:

$x^2 < 4$,

$x^2 + 4x + 4 < 0$

$x^2 - 81 \geq 0$,

$(x - 14)(x + 10) < 0$

$(x + 3)^2 \leq 0$,

$\frac{6+x}{x-4} \geq 0$

$x^2 - 6x + 9 \geq 0$,

$(x^2 + 16)(x + 17) > 0$

3. Равносильны ли следующие неравенства:

a) $\frac{x-3}{x+1} \geq 0$ и $(x-3)(x+1) \geq 0$ b) $(x+5)(8-x) > 0$ и $\frac{2x+10}{x-8} > 0$?

4. Найти $D(f)$ если:

a) $f(x) = \sqrt{(5-x)(x+8)}$ b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x(x-2)}}$

5. Составьте неравенство, решением которого:

a) $(-\infty; 1] \cup (3; +\infty)$, b) $(-4; 4]$

6. Решение рациональных неравенств.

1) Решить неравенство: $x \leq 3 - \frac{1}{x-1}$

2) Найти $D(f)$, если $f(x) = \sqrt{1 - \frac{8}{1-x^2}}$

3) Решить неравенство: $\frac{(x+8)^4(1-x)^3}{(x+5)(x-2)^2} \geq 0$

$$x \leq 3 - \frac{1}{x-1}$$

$$x-3 + \frac{1}{x-1} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - x - 3x + 3 + 1}{x-1} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{x-1} \leq 0$$

$$\frac{(x-2)^2}{x-1} \leq 0$$

$$f(x) = \sqrt{1 - \frac{8}{1-x^2}}$$

$$1 - \frac{8}{1-x^2} \geq 0$$

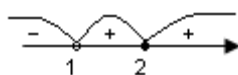
$$\frac{1-x^2-8}{1-x^2} \geq 0$$

$$\frac{x^2+7}{(x-1)(x+1)} \geq 0$$

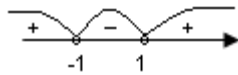
$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} \geq 0$$

$$\frac{(x+8)^4(1-x)^3}{(x+5)(x-2)^2} \geq 0$$

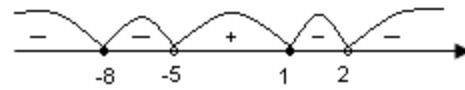
$$\frac{(x+8)^4(x-1)^3}{(x+5)(x-2)^2} \leq 0$$



Ответ: $(-\infty; 1) \cup \{2\}$



Ответ: $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$



Ответ: $\{-8\} \cup (-5; 1]$

Дополнительный вопрос: Решите неравенство $\frac{-(x+4)^2}{x^2(x-4)^6} \geq 0$ ответ: $x = -4$,

Рациональные неравенства вида $f(x) < 0$ и $\frac{f(x)}{q(x)} < 0$ когда функции $f(x)$ и $q(x)$

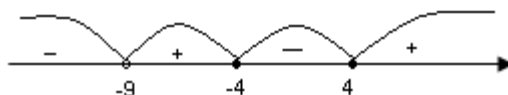
можно представить как произведение линейных множителей можно решать методом интервалов. Метод интервалов основан на свойстве непрерывных функций. Одним из важных свойств является свойство знакопостоянства непрерывной функции: если на интервале $(a; b)$ функция f непрерывна и не обращается в 0, то она на этом интервале сохраняет постоянный знак.

Алгоритм решения неравенств методом интервалов таков:

1. Находим $D(f)$, где f – непрерывная функция в любой точке $D(f)$.
2. Решая уравнение $f(x) = 0$, находим нули функции. Корни уравнения, $\in D(f)$, разбивают её на промежутки, на каждом из которых непрерывная функция не обращается в 0, значит знакопостоянна.
3. Наносим $D(f)$ и нули функции на числовую прямую.

4. Исследуем и расставляем знаки функции на каждом промежутке.
5. С учетом знака неравенства записываем ответ.
Полезно для расстановки знаков пользоваться следующим правилом:
а) Если все линейные множители различны, то знаки функции будут чередоваться, причем если коэффициенты при x у всех двучленов положительны, то при x большем большего из нулей двучленов функция положительна (положительный знак на самом правом интервале, а при переходе через точки знаки меняются).

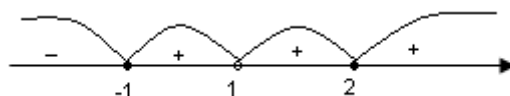
Пример: $\frac{(x-4)(x+4)}{x+9} \geq 0$



Ответ: $(-9; -4] \cup [4; +\infty)$

- б) В разложении левой части неравенства могут встречаться одинаковые множители, если их четное число, т.е. показатель двучлена четный, то функция сохраняет постоянный знак, а при нечетном – меняет, при переходе через точку.

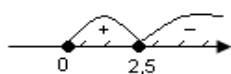
Пример: $\frac{(x+1)^3(x-2)^2}{(x-1)^4} \leq 0$



Ответ: $(-\infty; -1] \cup \{2\}$

Решение иррациональных неравенств.

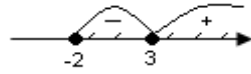
$$\begin{array}{llll}
 (\sqrt{x}-3)(x^2+1) < 0 & (x^2-9)\sqrt{x+2} \leq 0 & (x+2)\sqrt{x^2-1} > 0 & \\
 1) (5-2x)\sqrt{x} \leq 0 & 2) D(f) = [0; +\infty) & 3) x+2 \geq 0, x \geq -2 & 4) x^2-1 \geq 0 \\
 D(f) = [0; +\infty) & \sqrt{x}-3=0 & D(f) = [-2; +\infty) & D(f) = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \\
 \sqrt{x}=3, x=9 & -3 \notin D(f), 3 \in D(f) & &
 \end{array}$$



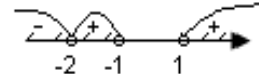
Ответ: $\{0\} \cup [2.5; +\infty)$



Ответ: $(0; 9)$



Ответ: $[-2; 3]$



Ответ: $(-2; -1] \cup (1; +\infty)$

Ответ: вариант 1 – 21

вариант 2 – 43

Решение.

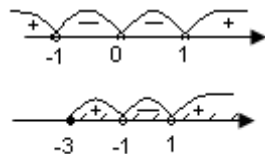
Вариант 1.

Вариант 2.

Задание		Ответ			
Вариант 1	Вариант 2	1	2	3	4
Решение $x^4 - x^2 < 0$	Неравенства: $x^4 - 4x^2 > 0$	$(-1; 1)$	$(-1; 0) \cup (0; 1)$	$(-2; 2)$	$(-\infty; -2) \cup$
$(x^2 - 4)\sqrt{x+3} > 0$	$(x^2 - 1)\sqrt{x+3} < 0$	$(-3; -2) \cup (2; +\infty)$	$(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$	$(-1; 1)$	$(-3; 1)$

$$x^4 - x^2 < 0$$

$$x^2(x-1)(x+1) < 0$$

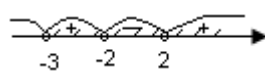


$$(-1; 0) \cup (0; 1)$$

$$(x^2 - 4)\sqrt{x+3} > 0$$

$$D(f) = [-3; +\infty)$$

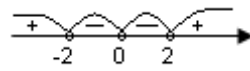
$$-2; 2 \in D(f)$$



$$(-3; -2) \cup (2; +\infty)$$

$$x^4 - 4x^2 > 0$$

$$x^2(x-2)(x+2) > 0$$



$$(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$$

$$(x^2 - 1)\sqrt{x+3} < 0$$

$$D(f) = [-3; +\infty)$$

$$-1; 1 \in D(f)$$

$$(-1; 1)$$

Критерии оценивания

На оценку «5» нужно решить 13 неравенств

На оценку «4» нужно решить 11 неравенств

На оценку «3» нужно решить 7 неравенств

Перечень рекомендуемых учебных изданий, Интернет-ресурсов, дополнительной литературы

Основные источники:

1. Башмаков М.И. Математика: учебник для учреждений нач. и сред.проф. образования. – М.: Издательский центр «Академия», 2012– 256 с.
2. Башмаков М.И. Математика: задачник для учреждений нач. и сред.проф. образования. – М.: Издательский центр «Академия», 2012– 416 с.
3. Пехлецкий И.Д. Математика: учебник для студ. образоват. учреждений сред.проф. образования М.: Издательский центр «Академия», 2008 г.

Дополнительные источники

1. Алимов Ш.А. и др. Алгебра и начала анализа: учеб. Для 10-11 кл. общеобразоват.учрежд., М.: Просвещение, 2006.
2. Омельченко В.П. Математика: учеб.пособие. Ростов н/Д: Феникс, 2009.-380 с.

Интернет-ресурсы:

<http://www.matburo.ru/literat.php>

<http://matema.narod.ru/>

<http://www.terver.ru/>